Übungen zur Vorlesung ‘Lineare Algebra II’

V. Hoskins (SS 2018)

Übungsblatt 2

Abgabe: Bis Montag, den 30.04.2018, 16 Uhr.

Aufgabe 1. (8 Punkte) Sind die folgende *reelle* Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 6 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

diagonalisierbar (bzw. triagonalisierbar)?

Aufgabe 2. (12 Punkte) Sei $d \geq 1$ und V der Vektorraum aller reellen Polynome vom Grad höchstens d:

$$V := \{P(t) \in \mathbb{R}[t] : \mathrm{Grad}\,(P) \leq d\}.$$

Sind die folgende lineare Endomorphismen f_i von V diagonalisierbar (bzw. triagonalisierbar)?

a) $f_1(P(t)) := t \cdot P'(t)$,

b) $f_2(P(t)) := P'(t)$,

c) $f_3(P(t)) := P(-t)$,

d) $f_4(P(t)) := P(t+1)$,

wobei $P'(t)$ die Ableitung von $P(t)$ ist.

Aufgabe 3. (10 Punkte) Sei $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ die folgende lineare Abbildung

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x_1 + x_3 \\ x_4 \\ x_1 - x_3 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Finden Sie zwei f-invariante Untervektorräume U_1 und U_2 der Dimension 2 von $\mathbb{R}^4$, so dass $\mathbb{R}^4 = U_1 \oplus U_2$. Ferner zeigen Sie, dass es eine geordnete Basis $\mathcal{A}$ von $\mathbb{R}^4$ gibt mit

$$M^{\mathcal{A}}_{\mathcal{A}}(f) = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix},$$

wobei $A, B \in \mathrm{Mat}_{2\times 2}(\mathbb{R})$. Ist f diagonalisierbar (bzw. triagonalisierbar)?

Aufgabe 4. (10 Punkte) Sei $f : V \to V$ ein linearer Endomorphismus eines n-dimensionalen K-Vektorraumes. Beweisen Sie, dass die folgende Aussagen äquivalent sind.

(1) f ist nilpotent,

(2) Es gibt $1 \leq r \leq n$ mit $m_f(t) = t^r$,

(3) $\chi_f(t) = t^n$,

(4) Es gibt eine geordnete Basis $\mathcal{A}$ von V mit

$$M_{\mathcal{A}}^{\mathcal{A}}(f) = \begin{pmatrix} 0 & * & * \\ \vdots & \ddots & * \\ 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}.$$

(5) Es gibt eine Fahne $\{0_V\} = V_0 \subsetneq V_1 \subsetneq \cdots \subsetneq V_n = V$ mit $f(V_{i+1}) \subset V_i$ für alle $0 \leq i < n$.