Übungen zur Vorlesung ‘Lineare Algebra II’

V. Hoskins (SS 2018)

Übungsblatt 11

Abgabe: Bis Montag, den 02.07.2018, 16 Uhr.

Aufgabe 1. (10 Punkte) Wir werden eine *QR-Zerlegung* von $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ finden (d.h. es gibt eine orthogonale Matrix Q und eine obere Dreiecksmatrix R, so dass $A = QR$).

a) Seien $\{a_1, \ldots, a_n\}$ die Spaltenvektoren von A und $\{q_1, \ldots, q_n\}$ die durch das Gram-Schmidt Verfahren aus $\{a_1, \ldots, a_n\}$ konstruierte Orthonormalbasis. Warum ist $Q = (q_1 | \cdots | q_n)$ orthogonal? Zeigen Sie dass $R := Q^t A$ eine obere Dreiecksmatrix ist.

b) Wie kann man die QR-Zerlegung benutzt, lineare Gelichungssysteme zu lösen? Hinweis: Für $b \in \mathbb{R}^n$, finden Sie $b' \in \mathbb{R}^n$ mit $\mathcal{L}(A, b) = \mathcal{L}(R, b')$.

Aufgabe 2. (8 Punkte) Beweisen Sie den Spektralsatz für unitäre Matrizen (ohne den Spektralsatz für normale Endomorphismen zu verwenden): für $A \in \mathrm{U}(n)$ gilt:

a) Die Eigenwerte von A haben Betrag 1,

b) $\mathbb{C}^n$ hat eine ON Basis von Eigenvektoren von A,

c) Es gibt $U \in \mathrm{U}(n)$, so dass $U^\dagger A U$ diagonal ist mit Einträge vom Betrag 1.

Aufgabe 3. (10 Punkte) Für die reelle symmetrische Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 2 & 0 & 2 \\ 2 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

finden Sie eine matrix $P \in \mathrm{O}(3)$ und eine Diagonalmatrix D mit $P^t A P = D$.

Aufgabe 4. (12 Punkte) Sei $K = \mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$ und seien U, V und W endlichdimensionale K-Vektorräume mit Skalarprodukten. Für $f, f_i \in \mathrm{Hom}_K(U, V)$ und $g \in \mathrm{Hom}_K(V, W)$ und $\lambda_i \in K$ beweisen Sie die folgende Aussagen.

a) $(\lambda_1 \cdot f_1 + \lambda_2 \cdot f_2)^{\mathrm{ad}} = \overline{\lambda_1} f_1^{\mathrm{ad}} + \overline{\lambda_2} f_2^{\mathrm{ad}}$,

b) $(g \circ f)^{\mathrm{ad}} = f^{\mathrm{ad}} \circ g^{\mathrm{ad}}$,

c) $(\mathrm{Id}_V)^{\mathrm{ad}} = \mathrm{Id}_V$,

d) $(f^{\mathrm{ad}})^{\mathrm{ad}} = f$.