# Übungen zur Vorlesung 'Lineare Algebra II'

V. Hoskins (SS 2018)

## Übungsblatt 10

Abgabe: Bis Montag, den 25.06.2018, 16 Uhr.

**Aufgabe 1.** (10 Punkte) Verwenden Sie das Gram-Schmidt Verfahren zu den Vektoren

$$\mathcal{A} := \left\{ v_1 := \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, v_2 := \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix}, v_3 := \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

aus $V = \mathbb{R}^4$ um eine ON-Basis von $\mathrm{Span}(\mathcal{A})$ zu finden.

**Aufgabe 2.** (10 Punkte) Für das Skalarprodukt auf $V = \mathbb{R}[t]_{\leq 2} := \{P(t) : \mathrm{Grad}(P) \leq 2\}$, das durch

$$\langle P(t), Q(t) \rangle := \int_0^1 P(t)Q(t)dt$$

definiert wird, verwenden Sie das Gram-Schmidt Verfahren zu der Basis $\mathcal{A} = \{1, t, t^2\}$ um eine ON-Basis zu finden.

**Aufgabe 3.** (10 Punkte) Sei $V$ ein endlichdimensionaler $K$-Vektorraum mit Skalarprodukt ($K = \mathbb{R}$ oder $K = \mathbb{C}$). Wenn $f \in \mathrm{End}_K(V)$ triagonalisierbar ist, beweisen Sie dass es eine ON-Basis $\mathcal{A}$ von $V$ gibt, so dass $M_{\mathcal{A}}^{\mathcal{A}}(f)$ eine obere Dreiecksmatrix ist.

[Hinweis: Wenn $\mathcal{B}$ eine Basis von $V$ ist, so dass $M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(f)$ eine obere Dreiecksmatrix ist, sei $\mathcal{A}$ die ON-Basis, die sich aus der Basis $\mathcal{B}$ nach dem Gram-Schmidt Verfahren ergibt.]

**Aufgabe 4.** (10 Punkte) Beweisen Sie die folgende Aussagen:

a) Für einen unitären Vektorraum $V$ und $f \in \mathrm{End}_{\mathbb{C}}(V)$ gibt es eine ON-Basis $\mathcal{A}$ von $V$, so dass $M_{\mathcal{A}}^{\mathcal{A}}(f)$ eine obere Dreiecksmatrix ist.

b) Für $A \in \mathrm{Mat}_{n\times n}(\mathbb{C})$ gibt es $U \in \mathrm{U}(n)$ so dass $U^\dagger AU$ eine obere Dreiecksmatrix ist.