Übungen zur Vorlesung 'Lineare Algebra II'

V. Hoskins (SS 2018)

Übungsblatt 1

Abgabe: Bis Montag, den 23.04.2018, 16 Uhr.

Aufgabe 1. (5+3+2+2 Punkte) Zwei Matrizen $A, B \in \mathrm{Mat}_{n\times n}(K)$ heißt *ähnlich* (schreibweise: $A \sim B$), wenn es $S \in \mathrm{GL}_n(K)$ gibt mit $A = SBS^{-1}$. Beweisen Sie

a) Ähnlichkeit auf $\mathrm{Mat}_{n\times n}(K)$ ist eine Äquivalenzrelation.

b) Eine Matrix $A \in \mathrm{Mat}_{n\times n}(K)$ ist genau dann ähnlich zu einer Diagonalmatrix, wenn die lineare Abbildung $F_A : K^n \to K^n$ mit $F_A(x) := Ax$ diagonalisierbar ist.

c) Wenn $f : V \to V$ ein linearer Endomorphismus eines K-Vektorraumes der Dimension n ist, gilt $M^{\mathcal{A}}_{\mathcal{A}}(f) \sim M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}(f)$ für zwei geordnete Basen $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$ von V.

d) Für zwei ählinche Matrizen $A \sim B$ gilt $\chi_A(f) = \chi_B(f)$.

Aufgabe 2. (8 Punkte) Berechnen Sie das charakteristische Polynom von

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 1 \\ -3 & 2 & 1 \\ 3 & 0 & 2 \end{pmatrix} \in \mathrm{Mat}_{3\times 3}(\mathbb{R})$$

und finden Sie die Eigenwerte und Eigenräume von A.

Aufgabe 3. (10 Punkte) Sei $V = \mathbb{R}^n$ und $f \in \mathrm{End}_{\mathbb{R}}(V)$ mit $f^2 = \mathrm{Id}_V$. Beweisen Sie:

a) Wenn λ ein Eigenwert von f ist, dann ist $\lambda = \pm 1$.

b) Es gilt $V = \mathrm{Eig}(f, 1) \oplus \mathrm{Eig}(f, -1)$.
Hinweis: Es gilt $v = \frac{1}{2}(v + f(v)) + \frac{1}{2}(v - f(v))$ für alle $v \in V$.

c) Es gibt $0 \leq r \leq n$ und eine geordnete Basis $\mathcal{B}$ von V so dass

$$M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & -I_{n-r} \end{pmatrix}.$$

d) Es gilt $\det(f) = \pm 1$.

Bitte wenden!

Aufgabe 4. (10 Punkte) Sei K ein algebraisch abgeschlossener Körper (d.h. jedes nichtkonstante Polynom mit Koeffizienten in K hat eine Nullstelle in K). Beweisen Sie, dass jedes Polynom $P(t) \in K[t]$ mit positivem Grad in Linearfaktoren zerfällt.

[Hinweis: Induktion nach dem Grad und Division mit Rest für Polynome].