Übungen zur Vorlesung ‘Analysis I’

V. Hoskins, V. Trageser (SS 2016)

Übungsblatt 9

Abgabe: Bis Freitag, den 17.06.2016, 16 Uhr.

Aufgabe 1. (10 Punkte) Beweisen Sie, dass der Konvergenzradius der folgenden Potenzreihen

$$\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} \quad \text{and} \quad \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!}$$

unendlich ist.

Aufgabe 2. (10 Punkte) Berechnen Sie die Konvergenzradien der folgenden Potenzreihen.

a) $\sum_{k=0}^{\infty} 3^k x^k$,

b) $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{k^3+k}{k^2} x^k$,

c) $\sum_{k=0}^{\infty} \binom{2k}{k} x^k$,

d) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(x+1)^k}{k2^k}$ (Geben Sie den Konvergenzradius um den Entwicklungspunkt -1 an).

Aufgabe 3. (10 Punkte) Sei $n \in \mathbb{N}^*$. Beweisen Sie, dass die folgende Abbildungen $||-|| : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ Normen auf $\mathbb{R}^n$ sind.

a) $||(x_1, \dots, x_n)||_1 := \sum_{i=1}^{n} |x_i|$,

b) $||(x_1, \dots, x_n)||_2 := \sqrt{\sum_{i=1}^{n} |x_i|^2}$,

c) $||(x_1, \dots, x_n)||_\infty := \max\{|x_i| : 1 \leq i \leq n\}$.

Aufgabe 4. (10 Punkte) Für jede der folgenden Teilmengen von $\mathbb{R}$, überprüfen Sie ob die Menge offen, abgeschlossen, offen und abgeschlossen oder weder offen noch abgeschlossen ist. Erklären Sie ihre Antworten.

a) Für $a \in \mathbb{R}$, die Teilmenge $(a, \infty) = \{c \in \mathbb{R} : c > a\}$.

b) Für $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$, die Teilmenge $[a, b] := \{c \in \mathbb{R} : a \leq c \leq b\}$.

c) Für $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$, die Teilmenge $[a, b) := \{c \in \mathbb{R} : a \leq c < b\}$.

d) Die Teilmenge $\mathbb{R}$.

e) Die Teilmenge $\mathbb{Q}$.