Übungen zur Vorlesung ‘Analysis I’

V. Hoskins, V. Trageser (SS 2016)

Übungsblatt 8

Abgabe: Bis Freitag, den 10.06.2016, 16 Uhr.

Aufgabe 1. (10 Punkte) Beweisen Sie direkt aus der (ϵ, δ)-Definition der Stetigkeit ohne Benutzung der Sätze über Rechenregeln für stetige Funktionen, dass die folgende Funktionen stetig sind.

a) $f_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, die durch $f_1(x) = 3x$ definiert wird.

b) $f_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, die durch $f_2(x) = 2x + 1$ definiert wird.

c) $f_3 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, die durch $f_3(x) = x^2$ definiert wird.

d) $f_4 : [0, \infty) \to [0, \infty)$, die durch $f_4(x) = \sqrt{x}$ definiert wird.

Aufgabe 2. (10 Punkte) Es seien $D \subset \mathbb{R}$ und $f, g : D \to \mathbb{R}$ Funktionen, die stetig in $a \in D$ sind. Beweisen Sie

a) Die Funktion $|f| : D \to \mathbb{R}$, $x \mapsto |f(x)|$, ist stetig in a.

b) Die Funktion $\max\{f, g\} : D \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \max\{f(x), g(x)\}$, ist stetig in a.

c) Ist $\min\{f, g\} : D \to \mathbb{R}$ in a stetig?

Hinweis für b): Beweisen Sie, für $x, y \in \mathbb{R}$,

$$\max\{x, y\} = \frac{1}{2}\left(x + y + |x - y|\right)$$

Aufgabe 3. (8 + 4 Punkte) Es sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine Funktion mit der Eigenschaft

$$\text{für alle } \ x, y \in \mathbb{R} : \quad f(x + y) = f(x) + f(y).$$

a) Zeigen Sie, dass
   i) $f(0) = 0$,
   ii) für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt $f(-x) = -f(x)$,
   iii) für alle $x \in \mathbb{R}$ und für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt $f(nx) = nf(x)$ (mittels Induktion),
   iv) für alle $x \in \mathbb{R}$ und für alle $r \in \mathbb{Q}$ gilt $f(rx) = rf(x)$.

b) Wenn f stetig ist, beweisen Sie dass es $c \in \mathbb{R}$ gibt mit $f(x) = cx$ für alle $x \in \mathbb{R}$.

Aufgabe 4. (8 Punkte) Es sei $f : [a, b] \to [a, b]$ eine stetige Funktion. Beweisen Sie, dass es $x \in [a, b]$ gibt mit $f(x) = x$ (solches ein Element x heißt einen Fixpunkt von f).

Hinweis: Betrachten Sie die Funktion $g : [a, b] \to \mathbb{R}$, die durch $g(x) := f(x) - x$ definiert wird.