Übungen zur Vorlesung ‘Analysis I’

V. Hoskins, V. Trageser (SS 2016)

Übungsblatt 6

Abgabe: Bis Freitag, den 27.05.2016, 16 Uhr.

Aufgabe 1. (10 Punkte) Sei $(a_n)_{n\geq 0}$ eine Folge reeller Zahlen. Beweise oder widerlege:

a) Wenn die Teilfolgen $(a_{2n})_{n\geq 0}$ und $(a_{2n+1})_{n\geq 0}$ beide gegen a konvergieren, konvergiert $(a_n)_{n\geq 0}$ gegen a.

b) Wenn die Teilfolgen $(a_{2n})_{n\geq 0}$ und $(a_{2n+1})_{n\geq 0}$ konvergieren, dann konvergiert $(a_n)_{n\geq 0}$.

c) Wenn die Teilfolgen $(a_{2n})_{n\geq 0}$, $(a_{2n+1})_{n\geq 0}$ und $(a_{3n})_{n\geq 0}$ konvergieren, dann konvergiert $(a_n)_{n\geq 0}$.

Aufgabe 2. (10 Punkte) Sei K ein angeordneter Körpert. Es seien $(a_n)_{n\geq 0}$, $(b_n)_{n\geq 0}$ Cauchy-Folgen in K. Beweisen Sie:

a) $(a_n + b_n)_{n\geq 0}$ ist eine Cauchy-Folge.

b) $(a_n b_n)_{n\geq 0}$ ist eine Cauchy-Folge.

Aufgabe 3. (10 Punkte) Sei $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq 1$ und $x \in \mathbb{R}$ mit $x \geq 0$. Beweisen Sie, dass es genau eine reelle Zahl y mit $y \geq 0$ gibt, so dass $y^n = x$. Man schreibt $y := \sqrt[n]{x}$.

Hinweis: Verwenden Sie die Vollständigkeit von $\mathbb{R}$ und die Bernoullische Ungleichung

$$(1+z)^n \geq 1 + nz \quad \text{für } z \geq -1.$$

Aufgabe 4. (10 Punkte) Es sei $x \in \mathbb{R}$ mit $x > 0$. Beweisen sie, dass die Folge $(\sqrt[n]{x})_{n\geq 1}$ gegen 1 konvergiert.

Hinweis: Zuerst sei $x \in \mathbb{R}$ mit $x \geq 1$ und Zeigen Sie, dass $\sqrt[n]{x} \geq 1$ gilt und $x \geq 1+n(\sqrt[n]{x}-1)$ gilt (mittels die Bernoullische Ungleichung). Dann verwenden Sie das Sandwich Lemma. Für $0 < x < 1$, betracten Sie die Folge $(1/\sqrt[n]{x})_{n\geq 1}$