Übungen zur Vorlesung 'Analysis I'

V. Hoskins, V. Trageser (SS 2016)

Übungsblatt 13

Abgabe: Bis Freitag, den 15.07.2016, 16 Uhr.

Aufgabe 1. (10 Punkte) Sei $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ eine Funktion. Beweisen Sie, dass f eine Treppenfunktion ist genau dann, wenn das Bild von f eine endliche Teilmenge von $\mathbb{R}$ ist und f stetig außerhalb einer endlichen Teilmenge von $[a,b]$ ist (d.h. es gibt eine endliche Teilmenge $D \subset [a,b]$, so dass die Einschränkung $f|_{[a,b]\setminus D} : [a,b] \setminus D \to \mathbb{R}$ stetig ist).

Aufgabe 2. (9 Punkte) Berechnen Sie die folgende Integrale mit der Substitutionsregel.

$$a) \quad \int_{-1}^{1} \frac{t}{\sqrt{t^2+1}} dt \qquad b) \quad \int_{-1}^{1} \frac{5+t}{5-t} dt \qquad c) \quad \int_0^{\frac{1}{2}} t\sqrt{1-t^2} dt$$

Aufgabe 3. (8 Punkte) Berechnen Sie die folgende Integrale durch partielle Integration.

$$a) \quad \int x \exp(x) dx \qquad b) \quad \int \arcsin(x) dx$$

$$c) \quad \int \exp(x) \cos(x) dx \qquad d) \quad \int x^2 \cos(x) dx$$

Achtung: In manchen Fällen muss man mehrfach partiell intergrieren.

Aufgabe 4. (5 + 8 Punkte) Seien $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ eine Funktion und $c \in (a,b)$. In dieser Aufgabe werden Sie die folgende Aussage beweisen: f ist genau dann integrierbar, wenn $f|_{[a,c]}$ und $f|_{[c,b]}$ integrierbar sind. Ferner gilt

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$$

a) Beweisen Sie die Aussage, wenn f eine Treppenfunktion ist.

b) Beweisen Sie die Aussage für eine beliebige Funktion f mit Hilfe des Lemma zur Charakterisierung der Integrierbarkeit.