Übungen zur Vorlesung ‘Analysis I’

V. Hoskins, V. Trageser (SS 2016)

Übungsblatt 11

Abgabe: Bis Freitag, den 01.07.2016, 16 Uhr.

Aufgabe 1. (10 Punkte)

1. Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine Funktion, die beliebig oft differenzierbar ist. Wenn es $a < b$ gibt mit
$$f(a) = f(b) = f'(a) = f'(b) = 0,$$
beweisen Sie dass es $c \in (a, b)$ gibt mit $f'''(c) = 0$.
2. Beweisen Sie, dass die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, die durch $f(x) = x^5 + 4x + 1$ definiert wird, genau eine Nullstelle hat.

Aufgabe 2. (10 Punkte) Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ die Funktion $f(x) = (x^2 - 1)^n$. Für $r = 0, 1, \dots, n$, beweisen Sie, dass $f^{(r)}(x)$ mindestens r verscheidene Nullstellen in dem Intervall $(-1, 1)$ hat. Dann beweisen Sie, dass $f^{(n)}(x)$ genau n verscheidene Nullstellen hat und alle Nullstellen in dem Intervall $(-1, 1)$ liegt.

Aufgabe 3. (10 Punkte) Beweisen Sie die Identität

$$\text{für alle } \ x, y \in \mathbb{R} \ : \ \sin(x + y) = \sin(x)\cos(y) + \cos(x)\sin(y).$$

Aufgabe 4. (10 Punkte) Berechnen Sie die folgenden Limites:

a)
$$\lim_{x \to 1} \frac{x^4 + x^3 - 3x^2 - x + 2}{x^3 - 4x^2 + 5x - 2},$$

b)
$$\lim_{x \to 0} \frac{x}{\tan x},$$

c)
$$\lim_{x \to 0} \left(\frac{1}{x^2} - \frac{1}{x \sin x} \right).$$