Mechanik

Die Mechanik behandelt Bewegungen, ihre Abläufe und ihre Erzeugung. Die Bewegungsgesetze (Newtonschen Axiome) können in axiomatischer Form eingeführt werden:

Lex prima:
Jeder Körper beharrt in seinem Zustand der Ruhe oder gleichförmiger geradliniger Bewegung, wenn er nicht durch einwirkende Kräfte gezwungen wird, seinen Zustand zu ändern.

DEFINITION: Die Größe der Bewegung wird durch die Geschwindigkeit und die Menge der Materie vereint gemessen.

$$\vec{p} = m \cdot \vec{v}$$

$\vec{p} = const$; bei Abwesenheit von Kräften

Lex secunda:
Die Änderung der Bewegung ist der Einwirkung der bewegenden Kraft proportional und geschieht nach der Richtung derjenigen geraden Linie, nach welcher jene Kraft wirkt.

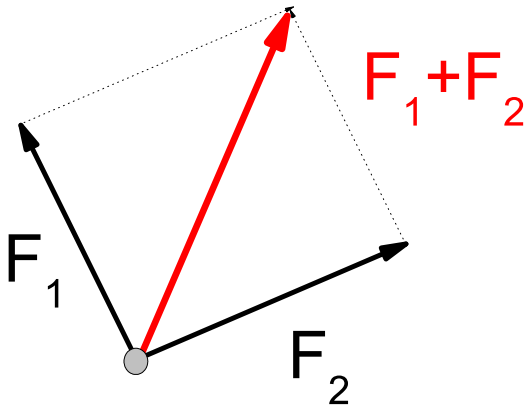
$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \frac{d(m \cdot \vec{v})}{dt} = \vec{F} = m \cdot \vec{a}$$

$$Masse\ mal\ Beschleunigung = Kraft$$

Lex tertia:
Die Wirkung ist stets der Gegenwirkung gleich, oder die Wirkungen zweier Körper aufeinander sind stets gleich und von entgegengesetzter Richtung.

$$\text{actio} = \text{reactio}; \qquad \vec{F}_R = -\vec{F}$$

Corollarium
Zwei Kräfte, die am gleichen Massenpunkt angreifen, setzen sich zur Diagonalen des von ihnen gebildeten Parallelogramms zusammen.



Basisgrößen, abgeleitete Größen

Quantitativ, reproduzierbar meßbaren Größen, sogenannten physikalischen Größen, sind als Produkt einer Maßzahl mit einer Einheit definiert:

$$\text{Physikalische Größe} = \text{Maßzahl} \cdot \text{Einheit}$$

Die **Maßzahl** ist das (numerische) Ergebnis einer Messung oder Berechnung (mit Messfehler oder Unsicherheit versehen);

Die **Einheit** legt die Meßskala in einer **Basiseinheit** oder einer **abgeleiteten Einheit** fest. Die abgeleiteten Einheiten haben oft Eigennamen. Beispiele siehe Tabelle.

Beispiele für physikalische Einheiten

Länge oder Strecke s	$s = 1{,}55$ m	(m $\widehat{=}$ Meter)
elektr. Stromstärke I	$I = 23{,}2$ A	(A $\widehat{=}$ Ampère)
Geschwindigkeit v	$v = 55$ km/h	(Kilometer/Stunde)
elektr. Spannung U	$U = 220$ V	(Volt $\widehat{=}$ J/As)

SI-Maßsystem

Das z. Z. international gültige Maßsystem ist das Système International d'Unités (kurz SI), welches sieben Grundgrößen mit entsprechenden Basiseinheiten definiert (siehe Tabelle). Aus diesen sieben Grundgrößen werden alle anderen (abgeleiteten) Größen zusammengesetzt.

Beispiele

- Geschwindigkeit: $v = \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} = \frac{\text{Strecke}}{\text{Zeit}}, \quad ; \qquad \text{Einheit}[v] \;\widehat{=}\; \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$
- kinetische Energie: $E_{\text{kin}} = \frac{m}{2}v^2 \quad \text{Einheit}[E_{\text{kin}}] \;\widehat{=}\; \frac{\mathrm{kg}\cdot\mathrm{m}^2}{\mathrm{s}^2} = N \cdot m \equiv \mathbf{J}\text{oule}$

Urkilogramm: siehe auch http://physics.nist.gov/cuu/Units/kilogram.html

SI-Einheiten

Grundgröße	Basiseinheit	Realisierung (Genauigkeit)	Bemerkungen
Länge l (s,d)	Meter (m), (auch mm, μm, nm, km)	Wellenlänge eines Jod-stabilisierten He–Ne–Lasers ($2{\cdot}10^{-9}$)	Lichtgeschwindigkeit $c = 2{,}99792458\ 10^8$m/s; $c = \lambda \cdot \nu$
Zeit t	Sekunde (s), (auch ms, µs, ns, min, h)	^{133}Cs Frequenz ν^{Cs} CH_4-stabilisierter He–Ne–Laser ($< 10^{-11}$)	Übertragung auf Quarzuhren
Masse m	Kilogramm(kg), (auch g, mg, µg, t)	Massenprototyp (ca. 10^{-8})	
elektrische Stromstärke I	Ampère (A)	magnetische Spulenwaage ($< 10^{-6}$) (neu: Quanten-Halleffekt)	(auch Spannungsnormale)
Lichtstärke S	Candela (cd)	Hohlraumstrahler (ca. $2 \cdot 10^{-3}$) (neu: Synchrotronstrahlung)	Übertragung auf Glühlampen
Temperatur T	Kelvin (K) (1 °C = 1 K)	absoluter Nullpunkt: 0 K $\equiv$ $-273{,}15$°C (typ. 10^{-4})	Fixpunkte; Tripelpunkt von H_2O: 273,16 K
Stoffmenge n (oder ν)	Mol (mol) 1 mol = N_A Teilchen	Röntgenstreuung–Si-Einheitszelle (10^{-6})	

Drei einfache Bewegungsformen

1. Das bewegte Objekt läuft eindimensional entlang einer **Geraden**. Die Bewegung kann **gleichförmig** (mit konstanter Geschwindigkeit) oder **beschleunigt** sein. Beinhaltet kinetische (Translations-) Energie.

2. Das bewegte Objekt läuft auf einer **Kreisbahn** (Radius = konstant). Der Betrag der Bahngeschwindigkeit kann konstant bleiben (gleichförmige Kreisbewegung), jedoch ändert sich ständig ihre **Richtung** (Radial- oder Zentripetalbeschleunigung). Beinhaltet Rotationsenergie.

3. Das bewegte Objekt läuft hin und her um einen festen Punkt, die Bewegung wiederholt sich **zyklisch** (nach der Schwingungsdauer). Einfachste Art: die Bewegung beschreibt eine Sinus- oder Kosinusfunktion (harmonische Schwingung). Beschleunigungen treten in jedem Zyklus auf, die Energie wechselt hin und her zwischen kinetischer und potentieller Energie.

Eine beliebige, allgemeine Bewegung kann als Überlagerung dieser drei Bewegungsformen beschrieben werden.

- *Kinematik*: Beschreibung der Bewegung selbst: Ort, Zeit, Geschwindigkeit, Beschleunigung
- *Dynamik*: Ursache der Bewegung: Kräfte, Wechselwirkungen
- *Statik*: Ursache der Ruhe: Kräftegleichgewicht

Kinematik der geradlinigen Bewegung

Zur Beschreibung einer Bewegung, d. h. für die Kinematik, brauchen wir die Zeitabhängigkeit von drei Größen:

s-t-Diagramm, Weg
v-t-Diagramm, Geschwingdigkeit
a-t-Diagramm, Beschleunigung

$$\begin{aligned} v(t) &= \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}\,, \\ a(t) &= \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}^2 s}{\mathrm{d}t^2} \end{aligned}$$

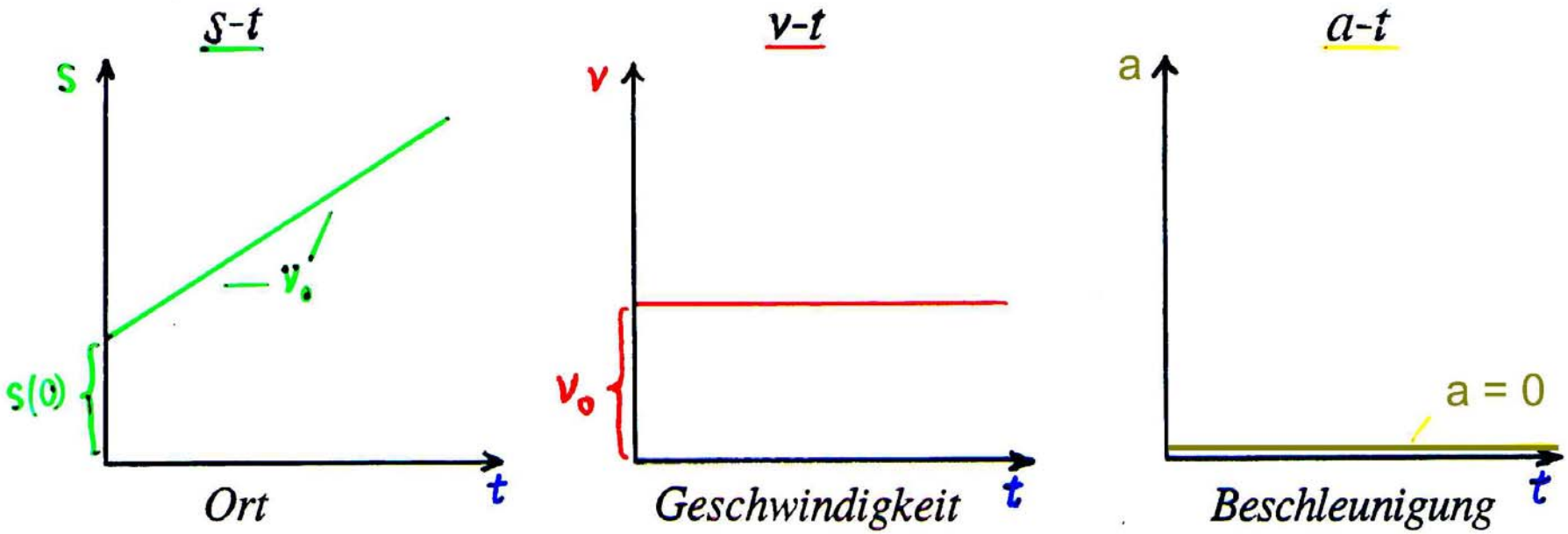
Oder in umgekehrter Richtung durch Integration:

$$s(t) = \int v(t)\,\mathrm{d}t$$
$$v(t) = \int a(t)\,\mathrm{d}t$$

Die *Integration* gibt die Fläche unter der jeweiligen Kurve an (geometrisch).

Geradlinige, gleichförmige Bewegung

Die Geschwindigkeit $v(t) = v_0 =$ konstant, sie ist die »Konstante der Bewegung«. Die Beschleunigung ist Null: $a(t) = \mathrm{d}v_0/\mathrm{d}t = 0$. Das Integral $\int\ v\,\mathrm{d}t$ (Rechteckfläche) ergibt

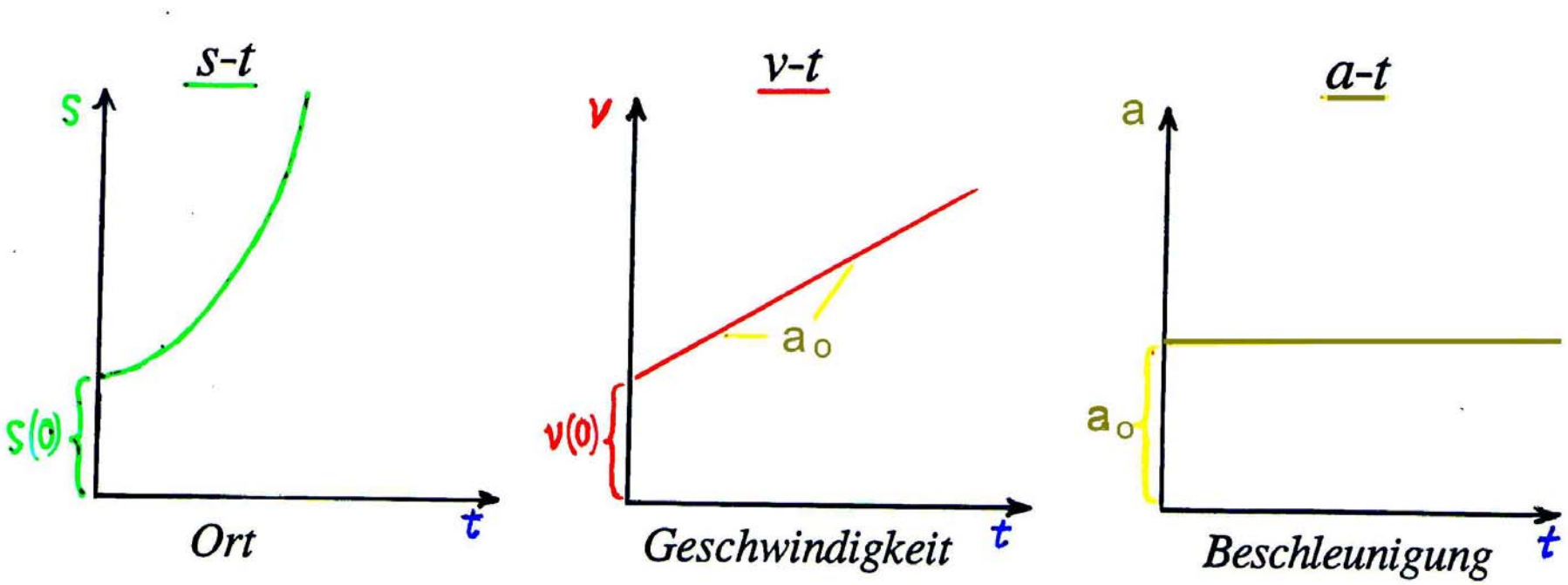


$$s(t) = v_0 t + s(0).$$

Der Ort wächst linear mit der Zeit. Die Konstante $s(0)$ (Anfangsort) ist eine Anfangsbedingung (Integrationskonstante). Mathematisch ist $s(t) = v_0 t + s(0)$ die Lösung der Bewegungsgleichung $v(t) = \mathrm{d}s/\mathrm{d}t$, mit $v(t) = v_0$.

Geradlinige, gleichmäßig beschleunigte Bewegung

Die Beschleunigung ist $a(t) = a_0 =$ konstant, sie ist nun die »Konstante der Bewegung«.

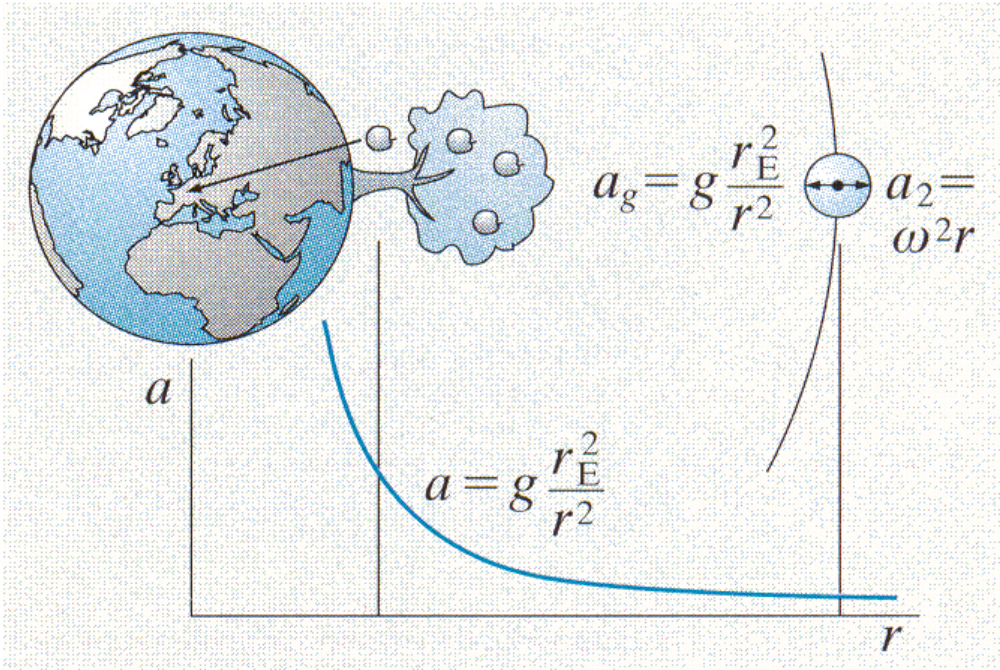


Die Integration der Bewegungsgleichungen $\frac{ds(t)}{dt} = v(t)$ und $\frac{dv(t)}{dt} = a(t)$ ergeben mit den Anfangswerten s_0, v_0 zur Anfangszeit t_0:

$$s(t) = s_0 + v_0(t - t_0) + \frac{a_0}{2}(t - t_0)^2.$$

Die Zeitabhängigkeit des Orts $s(t)$ ist parabelförmig.

Ein Beispiel der geradlinigen, gleichförmig beschleunigten Bewegung ist die *Fallbewegung* eines Körpers durch die Schwerkraft der Erde.



Gravitationsgesetz:

$$\vec{F} = G\frac{m_1 \cdot m_2}{r^2} \cdot \frac{\vec{r}}{|r|}; \quad wobei\ G = 6,67 \cdot 10^{-11}\frac{Nm^2}{kg^2}$$

Zusammenfassung, geradlinige Bewegung

die geradlinige Bewegung – kinematische Größen

Alle Größen stehen parallel zueinander, wir können auf die Vektorschreibweise verzichten! (Ansonsten werden Vektorgrößen hier mit Fettdruck gekennzeichnet: $\vec{\boldsymbol{s}}$ = Strecke als Vektor, s oder $|s|$ = Betrag der Strecke.)

- $s(t)$=Bewegungsstrecke [auch $x(t)$ genannt; i.a. eine Vektorgröße] (m)
- $v(t)$=Geschwindigkeit = $\mathrm{d}s/\mathrm{d}t$ (m/s): Steigung der s-t-Kurve
- $a(t)$=Beschleunigung =$\mathrm{d}v/\mathrm{d}t = \mathrm{d}^2s/\mathrm{d}t^2(m/s^2)$: Krümmung der s-t-Kurve

Bewegungsgleichungen und deren Lösungen

- *gleichförmige Bewegung*, $v(t) = v_0 = const$:

$$v(t) = v_0; \quad \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} = v_0 \; ;$$

Lösung:

$$\begin{aligned} s(t) &= s(0) + v_0 \cdot (t - t_0) \\ s(t) &= s(0) + v_0\, t \quad f\ddot{u}r \quad t_0 = 0. \end{aligned}$$

v_0-Konstante der Bewegung
$s(0)$-Anfangsbedingung

- *gleichmäßig beschleunigte Bewegung,* $a(t) = a_0 = const$:

$$a(t) = a_0;\ \frac{\mathrm{d}^2 s}{\mathrm{d}t^2} = a_0\ ;$$

Lösung:

$$\begin{aligned} s(t) &= s(0) + v(0) \cdot (t - t_0) + \frac{a_0}{2} \cdot (t - t_0)^2 \\ s(t) &= s(0) + v(0) \cdot t + \frac{a_0}{2} t^2 \quad f\ddot{u}r \quad t_0 = 0. \end{aligned}$$

Der Energiebegriff

Historisch ist der Energiebegriff relativ neu; er ist aus dem Begriff der Arbeit abgeleitet worden, der schon am Anfang der Mechanik zur Zeit Newtons stand.

Wir schauen uns deshalb die Begriffe *Arbeit, Energie, Leistung* in dieser Reihenfolge an. In der Physik haben diese Begriffe eine präzise Definitionen im Sinne der Einführung (»physikalischer Begriff«: genau und wiederholbar zu messen, durch Mathematik zu beschreiben).

Definition der (mechanischen) Arbeit

Mechanische Arbeit beschreibt die Wirkung einer Kraft F, die eine Bewegung entlang der Strecke s erzeugt. Diese Wirkung ist proportional der Stärke der Kraft und auch proportional der Länge der Bewegungsstrecke s. Wir definieren deshalb die Arbeit W mit

$$\text{Arbeit} = \text{Kraft} \cdot \text{Strecke}$$

oder

$$W = Fs$$

Einheit der Arbeit: Nach der obigen Definition hat die Arbeit die gleiche Einheit wie [Kraft · Strecke]. Die Einheit der Kraft F folgt aus $F = ma$ als

$$[F] = [m][a] = \mathrm{kg}\frac{\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}}{\mathrm{s}} = \mathrm{kg}\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2} \equiv \mathbf{N}\mathrm{ewton}$$

Damit ist die Einheit der Arbeit gleich **N**ewton · Meter = Nm = $\mathrm{kg}\frac{\mathrm{m}^2}{\mathrm{s}^2}$. Diese Einheit erhält auch einen eigenen Namen, **J**oule:

$$1\,\mathrm{J} = 1\,\mathrm{Nm} \equiv 1\,\mathrm{kg}\frac{\mathrm{m}^2}{\mathrm{s}^2}$$

Wir haben sie schon in Zusammenhang mit Energiedosis und Äquivalentdosis verwendet.

Nun gibt es einige Feinheiten, die in manchen Fällen die Definition der Arbeit noch komplizierter machen, als sie oben erscheint:

1. Die Größen Kraft und Strecke sind beide ***gerichtete*** Größen (Vektoren); sie haben sowohl einen Betrag $|F|, |s|$ als auch eine Richtung. Falls die Richtungen nicht übereinstimmen, ist nur die Kraftkomponente $F_{||}$ *parallel* zur Strecke wirksam bei der Berechnung der Arbeit. Wir müssen das Produkt $F \cdot s$ so definieren, daß nur diese Komponente berücksichtigt wird, und aus einem Produkt zweier Vektorgrößen eine skalare Größe machen. Genau dies tut das Skalarprodukt: $W = \vec{\boldsymbol{F}} \cdot \vec{\boldsymbol{s}} = |F||s|\,cos\,\varphi\ = F_{||}|s|$, (wobei φ den Winkel zwischen den Vektoren $\vec{\boldsymbol{F}}$ und $\vec{\boldsymbol{s}}$ bezeichnet).

2. Die Kraft ist nicht immer konstant über die Strecke s. Wir müssen einen geeigneten Mittelwert finden, um das Produkt von Kraft und Strecke zu berechnen. Dies ist möglich, wenn wir die Strecke s in viele, beliebig kurze differentiellen Teilstrecken $\mathrm{d}\,s$ aufteilen; in jeder Teilstrecke ist F dann annähernd konstant, es gilt dann: $\mathrm{d}W = \vec{\boldsymbol{F}} \cdot \mathrm{d}\vec{\boldsymbol{s}}$ für die entsprechende differentielle Arbeit $\mathrm{d}W$. Um die gesamte Arbeit über die Strecke so zu erhalten, müssen wir integrieren (summieren über Teilstrecken):

$$W(s_0) = \int \mathrm{d}W = \int_{s_0} \vec{\boldsymbol{F}} \cdot \mathrm{d}\vec{\boldsymbol{s}}\,.$$

Dies ist die allgemeine Definition der Arbeit. Wir schauen nun einige Beispiele an.

»Die Bewegung des großen Steins«

Ein Mensch wird damit beauftragt, einen großen Steinblock von einem Ort zu einem anderen zu bewegen. Er fängt optimistisch an ...

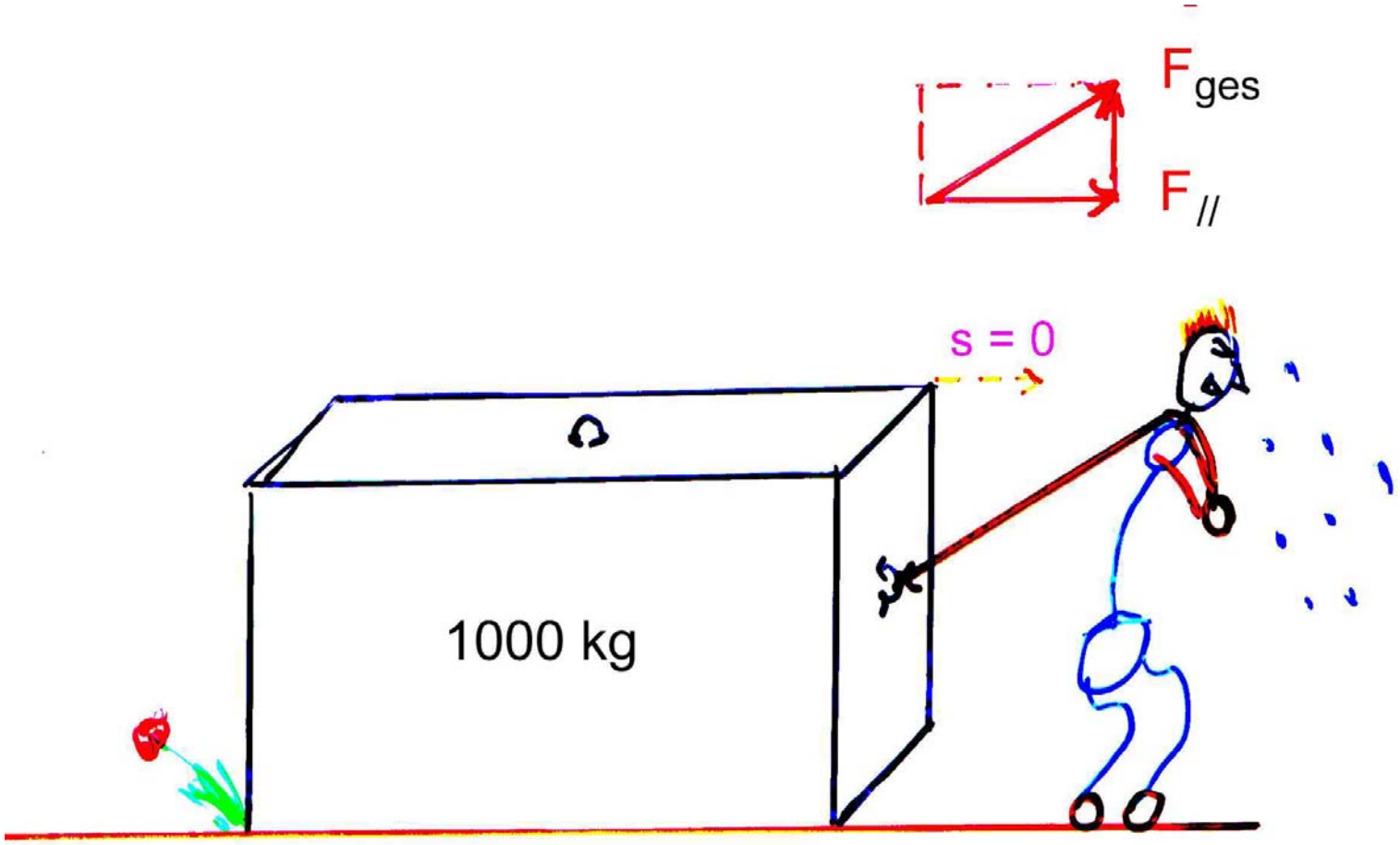


Abbildung 0.1. Tag 1 – die Kraft reicht einfach nicht aus ... Eine parallele Kraft $F_{||}$ ist da, sie reicht aber nicht aus, die Strecke s bleibt Null. Damit ist die physikalische Arbeit gleich Null; die physiologische Arbeit ungleich Null; und die Lohnarbeit gleich Null

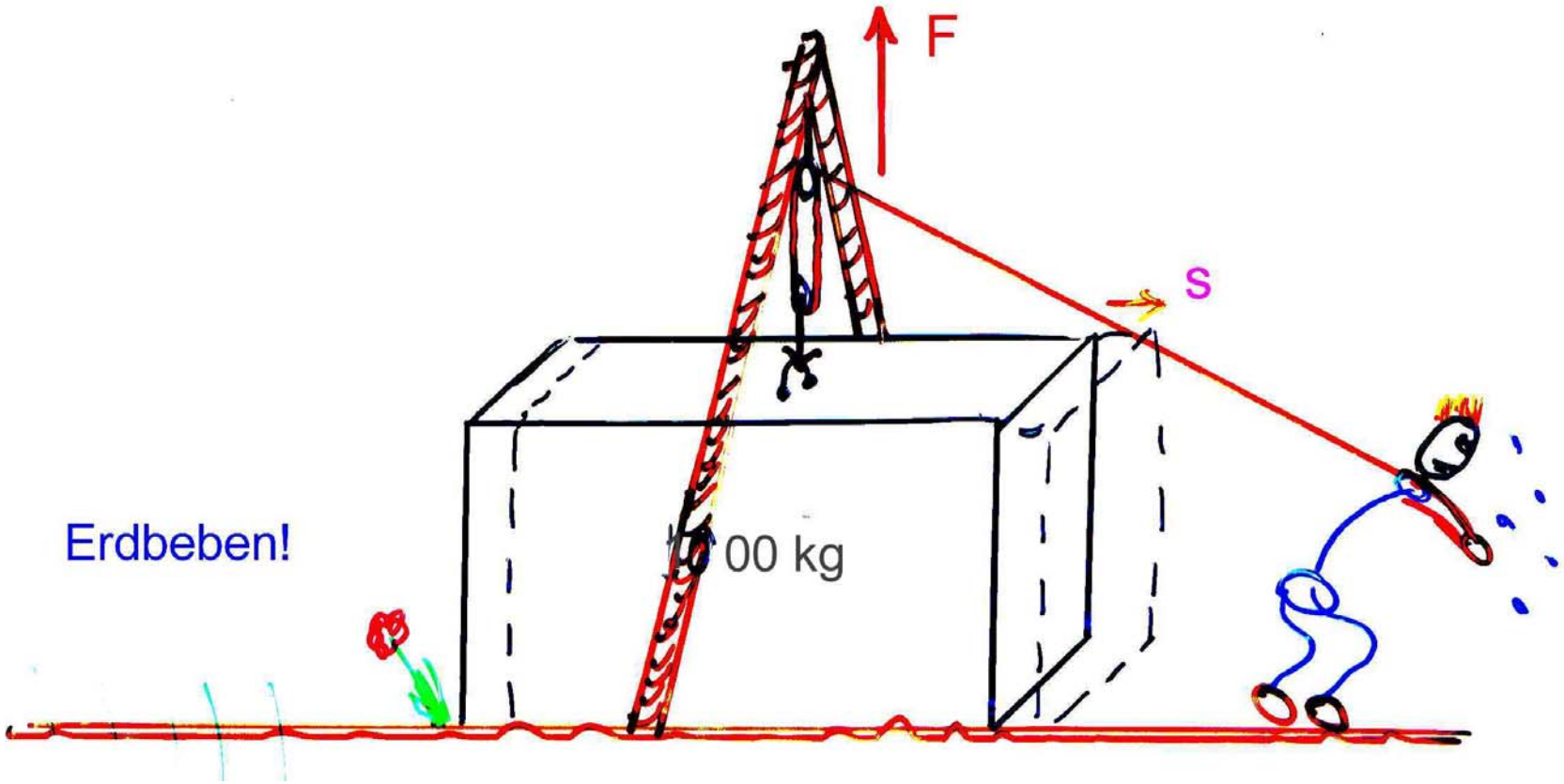


Abbildung 0.2. Tag 2 – ein anderer Versuch (mit Erdbeben...) Eine parallele Kraft $F_{||}$ ist nicht vorhanden. Durch Zufall ergibt sich eine Bewegungsstrecke in der erwünschten Richtung, die aber nicht durch die Arbeit des Menschen zustande kam. Daher ist die physikalische Arbeit gleich Null; die physiologische Arbeit ungleich Null; und die Lohnarbeit ungleich Null (zufällig)

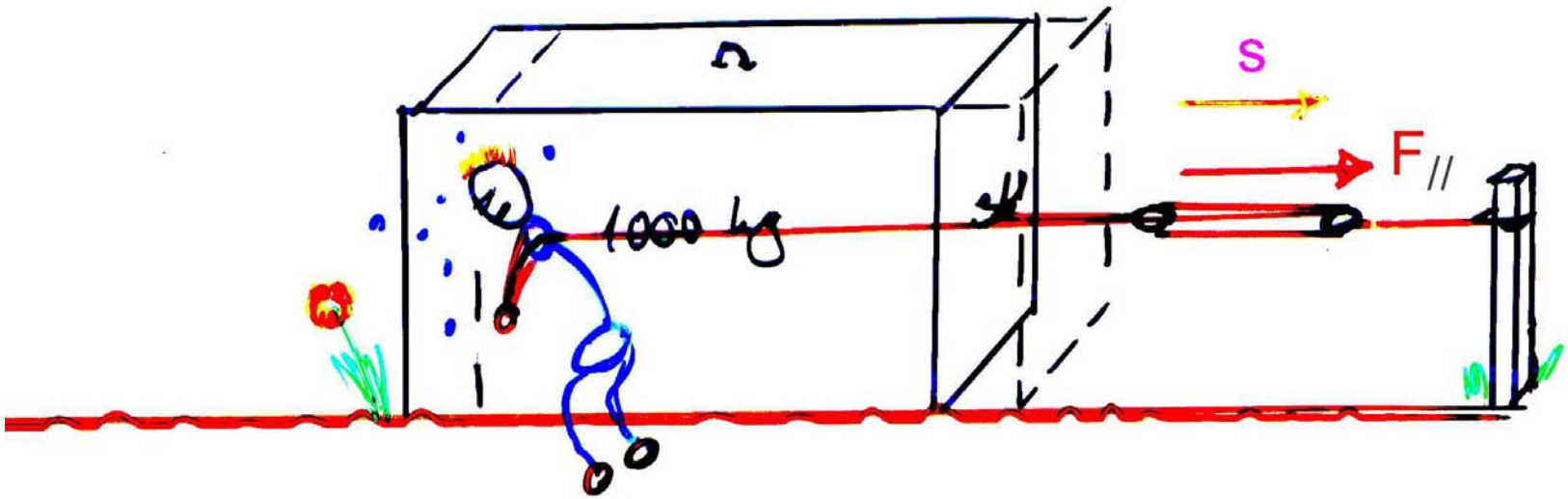


Abbildung 0.3. Tag 3 – endlich der richtige Weg ...Eine parallele Kraft $F_{||}$ und eine Bewegungsstrecke sind vorhanden, die Kraft hat die Bewegung (gegen Reibungskräfte) verursacht. Daher ist die physikalische Arbeit ungleich Null; die physiologische Arbeit ungleich Null; und die Lohnarbeit ungleich Null

Drei Arten der mechanischen Arbeit

Es ist hilfreich, die mechanische Arbeit zu **klassifizieren**, je nach den Bedingungen, unter denen sie geleistet wird:

1. **Beschleunigungsarbeit** –der einfachste Fall ist der, daß keine weiteren Kräfte (außer der »äußeren« Kraft $\boldsymbol{F}$) wirken. Dann erzeugt die Kraft $\boldsymbol{F}$ eine Bewegung der Masse m, ausgedrückt durch die Newton'sche Gleichung $\boldsymbol{F} = m\boldsymbol{a}$ ($\boldsymbol{a}$ = Beschleunigung = $\mathrm{d}v/\mathrm{d}t$). Die Beschleunigung (und die Bewegungsstrecke $\boldsymbol{s}$) sind immer parallel zur Kraft $\boldsymbol{F}$. Wir können die (differentielle) Arbeit schreiben als:

$$\mathrm{d}W = \boldsymbol{F} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{s} = ma\,\mathrm{d}s = m\left(\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}\right)\,\mathrm{d}s = m\,\mathrm{d}v\left(\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}\right) = mv\,\mathrm{d}v\;.$$

   Die gesamte Arbeit, für eine Beschleunigung vom Stand ($v = 0$) bis zu einer Endgeschwindigkeit $v = v_0$, ist gegeben durch Integration von $\mathrm{d}W$:

$$W(0 \to v_0) = \int_0^{v_0} \mathrm{d}W = m\int_0^{v_0} v\,\mathrm{d}v = \frac{m}{2}v_0^2$$

   Beispiel: ein Radfahrer beschleunigt vom Stand bis zur Geschwindigkeit v_0. Danach fährt er mit konstanter Geschwindigkeit weiter (die Reibung sei vernachlässigbar). Er hat die Beschleunigungsarbeit $(m/2)\,v_0^2$ geleistet, wobei m die Gesamtmasse (Rad + Fahrer) ist:

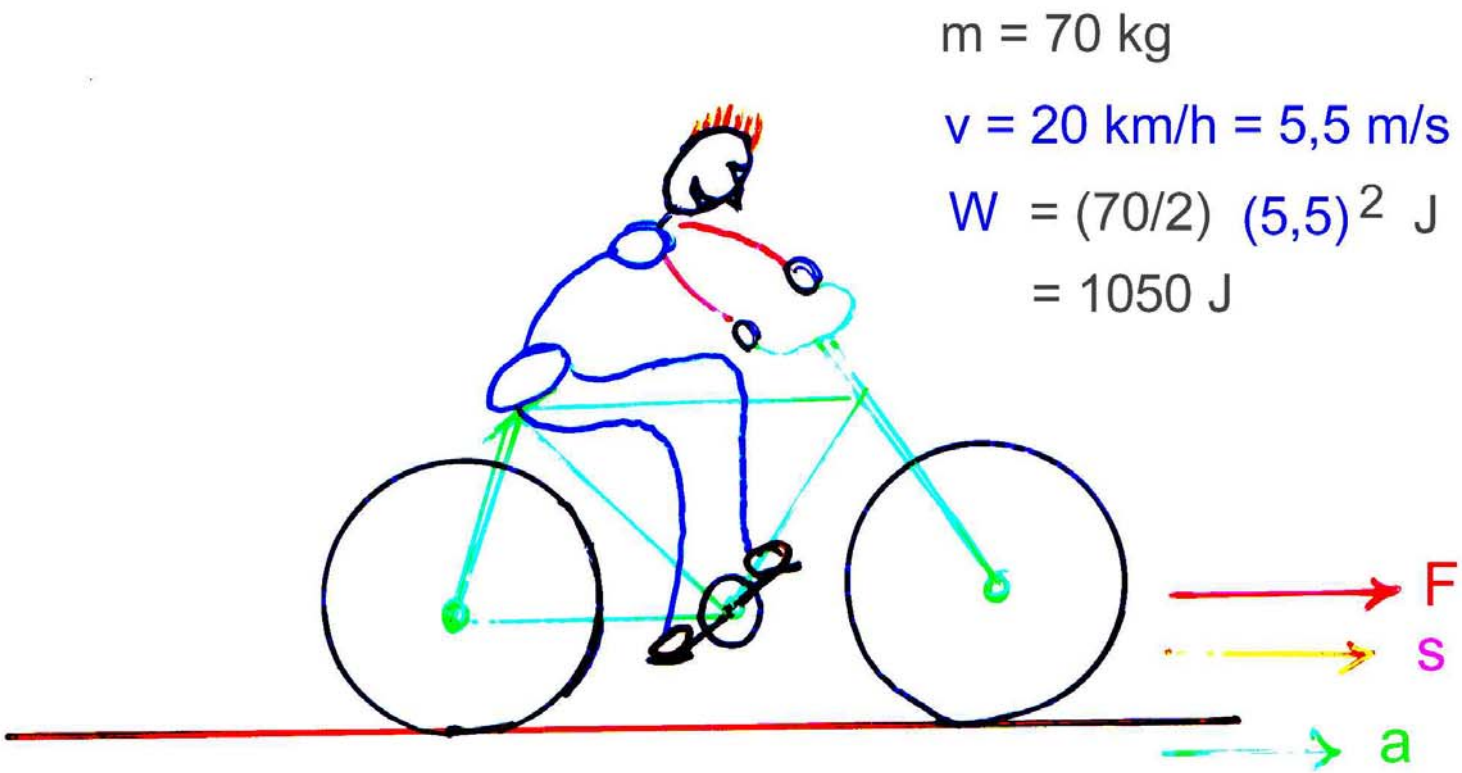


Abbildung 0.4. Zahlenbeispiel: Fahrrad + Fahrer haben eine Gesamtmasse von 70 kg; der Fahrer beschleunigt vom Stand ($v = 0$) bis zur Endgeschwindigkeit $v_0 = 20$ km/h (entsprechend 5,5 m/s). Die geleistete Beschleunigungsarbeit beträgt $\frac{70\,\mathrm{kg}}{2} \cdot (5{,}5\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}})^2 = 1050 \frac{\mathrm{kg\,m^2}}{\mathrm{s^2}}(\mathrm{J})$

2. **Verschiebungsarbeit** – die externe Kraft $\vec{\boldsymbol{F}}$ wirkt gegen eine Gegenkraft $\vec{\boldsymbol{F}}_{\mathrm{G}}$. Nach dem Arbeitsprozeß kommt das System zum Stillstand, es wird nur wenig Beschleunigungsarbeit geleistet; aber die Lage des Systems ändert sich durch die Arbeit (Verschiebung!), die geleistete Arbeit kann in der **Lage** gespeichert und später wieder freigesetzt werden.

   Beispiele:

   a) ***Hubarbeit*** – die Gegenkraft ist die *Schwerkraft*; z. B. wird ein Gewicht der Masse m um die Höhe h angehoben. Die Schwerkraft $m\boldsymbol{g}$ wirkt senkrecht nach unten ($\boldsymbol{g}$ = Erdbeschleunigung, eine Konstante, die die Stärke der Schwerkraft in der Nähe der Erdoberfläche angibt). Die wirkende Kraft $\boldsymbol{F}$ muß nur geringfügig größer als $m\boldsymbol{g}$ sein, sie wirkt senkrecht nach oben, parallel zur Bewegungsstrecke $\boldsymbol{s}$. Da die Kraft auch konstant ist, können wir die einfache Formel für die Arbeit benutzen:

$$W(0 \to h) = Fs = mgh \; .$$

   Diese Arbeit ist in der Lage h des Gewichtes gespeichert, sie kann (durch Hinunterlassen des Gewichtes) *wieder freigesetzt* werden. Für ein Gewicht der Masse 1 kg beträgt die Hubarbeit zum Heben um $h = 1\,\mathrm{m}$:

$$W = mgh = 1\,\mathrm{kg} \cdot 9{,}81\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2} \cdot 1\,\mathrm{m} = 9{,}81\,\mathrm{kg}\frac{\mathrm{m}^2}{\mathrm{s}^2} = 9{,}81\,\mathrm{J}\,.$$

Ähnlich ist es mit dem Radfahrer, wenn er bergauf fährt. Falls der Berg eine konstante Steigung des Winkels α hat, steigt er um die Höhe $h = s \sin\alpha$, wenn er die Strecke s zurücklegt. Die Gegenkraft ist die Parallelkomponente der Schwerkraft, $F_{G||} = mg \sin\alpha$. Da die Kraft konstant ist, können wir für die Arbeit schreiben:

$$W = F_{G||} s = mgs \sin\alpha = mgh \ ,$$

genau wie für das Heben eines Gewichtes. Diese Hubarbeit wird in der Lage des Fahrrads gespeichert und kann wieder freigesetzt werden (bergab fahren!).

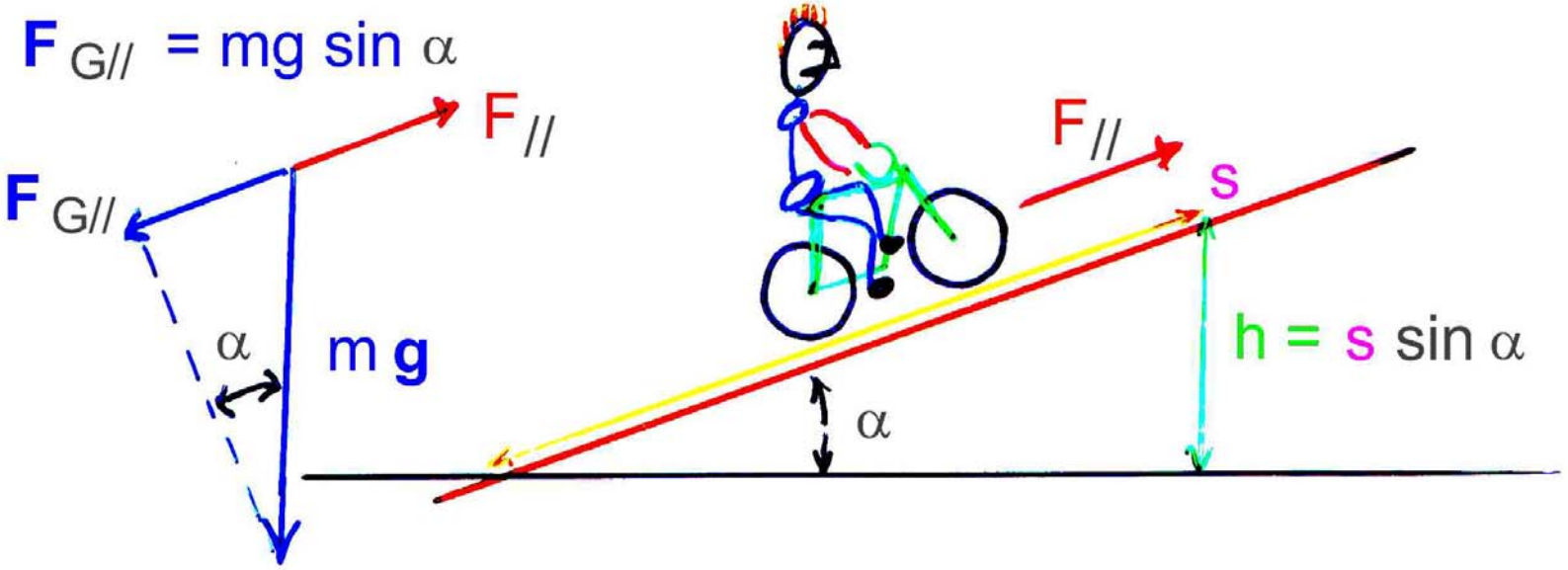


Abbildung 0.5.

b) *Volumenarbeit* – wird ein Gas in einem Zylinder der Querschnittsfläche A unter Druck P gespeichert, muß Arbeit geleistet werden, um es (durch Verschieben eines Kolbens) weiter zu komprimieren. Der Druck erzeugt eine Kraft $F = PA$ senkrecht zum Kolben; die externe Kraft zum Komprimieren muß geringfügig größer sein. Wird dadurch der Kolben um die Strecke $\mathrm{d}s$ hineingedrückt, ist die geleistete Arbeit:

$$\mathrm{d}W = F\,\mathrm{d}s = PA\,\mathrm{d}s = \ -P\,\mathrm{d}V$$

wo $\mathrm{d}V = A\,\mathrm{d}s$ die Volumenänderung ist (Fläche · Länge). Das Minuszeichen kommt daher, daß eine Kompression eine Verkleinerung des Volumens ($\mathrm{d}V$ negativ) aber eine Erhöhung des Druckes bedeutet. Diese Arbeit kann auch gespeichert und wiederbenutzt werden (z. B. Druckluftbremse). [Um die Gesamtarbeit W auszurechnen, müßten wir den Zusammenhang zwischen P und V – die Zustandsgleichung des Gases – kennen; siehe später unter Abschnitt 1 (Wärmelehre).]

c) *elastische Arbeit* – wenn ein elastisches Objekt (z. B. eine Schraubenfeder) verformt wird, reagiert es mit einer Gegenkraft, $\boldsymbol{F}_{\mathrm{el}} = -D\boldsymbol{x}$, wo $\boldsymbol{x}$ die Verformungsstrecke (Auslenkung aus der Ruhelage) und D eine Konstante (»Federkonstante«) sind. Die Auslenkung $\boldsymbol{x}$ ist parallel zur extern wirkenden Kraft $\boldsymbol{F}$, die die Auslenkung erzeugt. Die differentielle Arbeit (Auslenkung um eine geringe Strecke $\mathrm{d}\boldsymbol{x}$) ist dann:

$$\mathrm{d}W = \boldsymbol{F}\,\mathrm{d}\boldsymbol{x} = Dx\,\mathrm{d}x$$

und die Gesamtarbeit ist

$$W(x = 0 \to x_0) = \int \mathrm{d}W = D\int_{x_0} x\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}D\,x_0^2$$

(Integral s. oben!). Diese Arbeit ist in der Feder gespeichert, sie kann beim Entspannen freigesetzt werden.

3. *Reibungsarbeit* – wenn Reibungskräfte überwiegen, dient die externe Kraft F nur, um sie zu überwinden. Es wird weder Beschleunigungsarbeit noch Verscheibungsarbeit geleistet, das System kommt zur Ruhe, sobald die Kraft nicht mehr wirkt, und die ganze geleistete Arbeit geht schließlich in Wärme über. Sie ist meistens nicht im System gespeichert und kann nie (vollständig) wieder in mechanische Arbeit zurückverwandelt werden.
   Beispiel: ein Radfahrer fährt auf ebenem aber schlammigem Boden, die Reibung der Räder mit dem Boden ist groß. Sobald er aufhört zu treten bleibt er stehen. Er gewinnt weder an Höhe noch an Geschwindigkeit, seine Arbeit wird nur verwendet, um die Reibung zu überwinden.

   Zahlenbeispiel: Das menschliche Herz leistet Reibungsarbeit, um das Blut gegen den Strömungswiderstand der Gefäße zu pumpen. Es macht typisch 100 000 Schläge pro Tag und leistet dabei eine Arbeit von ca. 130 000 J. Bei einem 60-jährigen Menschen hat das Herz eine Gesamtarbeit von rund $4{\cdot}10^9$ J geleistet – das würde reichen, um 400 000 l Wasser (400 T!) um 1 000 m hochzuheben.

Die meisten Arbeitsprozesse bestehen aus einer Kombination der o.g. Arten der Arbeit, z. B. aus Hubarbeit, Beschleunigungsarbeit und Reibungsarbeit gleichzeitig. Das Radfahren oder Gehen sind Beispiele dafür.

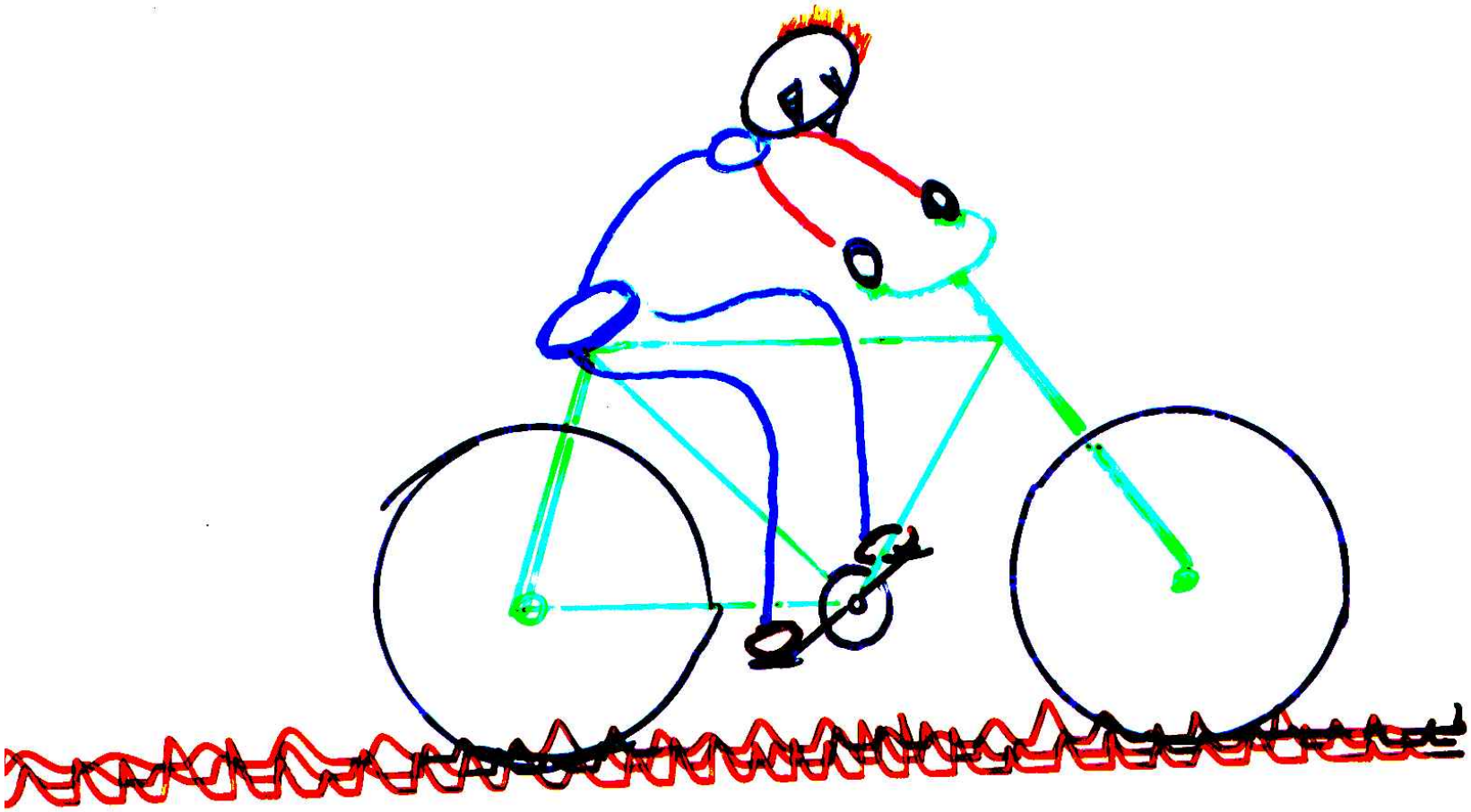


Abbildung 0.6.

Energieformen

Nun kommen wir zur zentralen Größe, zur *Energie*. Wir haben gesehen, daß die Arbeit eine Prozeßgröße ist – sie hängt von dem detaillierten Ablauf des Vorgangs ab.
Aber geleistete Arbeit kann den Zustand des Systems verändern; dieser Zustand hängt dann nicht mehr vom Ablauf ab.
Es ist beispielsweise völlig unerheblich, ob ein Wagen auf der Luftkissenschiene durch schnelles, kräftiges Entspannen einer Feder, durch gleichmäßiges Fallen eines Gewichtes, oder durch die sanfte Kraft eines Luftzuges auf einem kleinen Segel bis zur Endgeschwindigkeit v_0 gebracht wurde – er hat in jedem Fall den gleichen Zustand. Die entsprechende **Zustandsgröße** – die man als *gespeicherte Arbeit* bezeichnen könnte – ist die **Energie**.
Sie enthält weniger Informationen, als die Arbeit, da sie nicht mehr vom Ablauf des Arbeitsprozeßes abhängt. Dafür ist sie allgemein einsetzbar, um einen Zustand zu beschreiben. Sie hat die gleiche Einheit wie die Arbeit, d. h. **J**oule. Entsprechend der drei Arten der Arbeit gibt es verschiedene Typen von Energie:

1. Bewegungsenergie (*kinetische* Energie) ist gespeicherte *Beschleunigungsarbeit*; sie ist gegeben durch (s. oben)

$$E_{\text{kin}} = \frac{m}{2}v^2$$

für eine Masse m, die sich mit Geschwindigkeit v bewegt, egal, wie die Masse bis zu dieser Geschwindigkeit beschleunigt wurde.

2. Lageenergie (*potentielle* Energie) ist gespeicherte Verschiebungsarbeit; sie ist gegeben z. B. durch

$$E_{\text{pot}} = mgh$$

für die potentielle Energie eines Gewichtes der Masse m in der Höhe h über der Erdoberfläche; oder durch

$$E_{\text{pot}} = \frac{D}{2}x^2$$

für die elastische Energie einer Feder der Federkonstanten D, die um den Betrag x von ihrer Ruhelage ausgelenkt wurde.

3. Die Energieform, die durch Reibungsarbeit entsteht, ist die ungeordenete mikroskopische Bewegungsenergie, die wir *Wärme* nennen. Sie kann, im Gegensatz zu den rein mechanischen Energieformen, nicht frei und vollständig in andere Energieformen umgewandelt werden.

Es ist bemerkenswert, daß der Nullpunkt der Energie einigermassen willkürlich gewählt werden kann ($v = 0$ hängt vom Bezugssystem ab, Höhe $h = 0$ kann im 1. Stock oder im Keller sein, die Ruhelage einer Feder läßt sich durch eine konstante externe Kraft verschieben).

Energieerhaltung

Der Energieerhaltungssatz (»Energie-Satz«) Dies ist ein Erfahrungssatz, der erst in der Mitte des 19. Jh. formuliert wurde. Er besagt, daß man Energie weder erzeugen noch vernichten kann, nur umverteilen bzw. in andere, äquivalente Energieformen umwandeln kann. Eine Formulierung lautet:

> In einem abgeschlossenen System (keine Kräfte wirken von oder nach außen) bleibt die Summe aller Energieformen konstant.

Diese rein mechanische Aussage wird in der Wärmelehre ergänzt durch die Einbeziehung der Wärme als weitere Möglichkeit, die Energie eines Systems zu verändern. Die makroskopisch übertragene Wärme $\mathrm{d}Q$ ist, wie die Arbeit, eine Prozeßgröße; beide können zu einer Änderung der Energie (»inneren Energie« U) eines Systems beitragen. Dies nennt man den 1. Hauptsatz der Wärmelehre; mehr dazu später.

Leistung

Die Leistung ist eine vergleichsweise einfache Größe: sie gibt an, wie schnell Arbeit geleistet wird. Wenn die Rate konstant ist, kann man sie einfach definieren als:

$$P = \frac{W_{\text{ges}}}{t_0}$$

wo W_{ges} die gesamte in der Zeit t_0 geleistete Arbeit ist. Ihre Einheit ist J/s oder **W**att:

$$1\,\text{W} \equiv 1\,\frac{\text{J}}{\text{s}} = 1\,\frac{\text{kg}\,\text{m}^2}{\text{s}^3}$$

Falls die Rate, mit der die Arbeit geleistet wird, nicht konstant ist (dies ist der übliche Fall), muß man die momentane Leistung $P(t)$ verwenden:

$$P(t) = \frac{\mathrm{d}W}{\mathrm{d}t},$$

wobei die in der Zeit t_0 geleistete Gesamtarbeit durch Integration über die Zeit zu berechnen ist:

$$W_{\text{ges}} = \int_{t_0} P(t)\,\mathrm{d}t$$

Die momentane Leistung bei einer Bewegung mit Geschwindigkeit $\boldsymbol{v}$, verursacht durch eine Kraft $\boldsymbol{F}$, ist gegeben durch:

$$P(t) = \boldsymbol{F}(t)\boldsymbol{v}(t)\ .$$

Dynamik der geradlinigen Bewegung

Newton'sche Axiome

NEWTON, bauend auf die Ergebnisse GALILEIS, stellte drei Axiome auf, welche die Dynamik von Bewegungen allgemein und insbesondere der geradlinigen Bewegung beschreiben:

Trägheitsprinzip — ein (massives) Objekt, worauf keine Kräfte wirken, beharrt in seinem jeweiligen Zustand der geradlinigen, gleichförmigen Bewegung.

$$\vec{p} = m \cdot \vec{v} = const \quad \vec{p}\, ist\, der\, Impuls;\ Einheit:\ kg\frac{m}{s}.$$

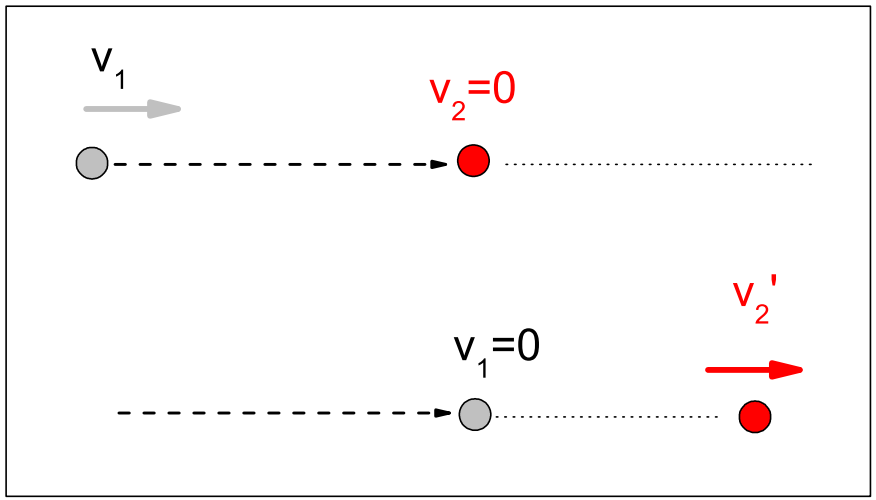
Impulserhaltungssatz

In einem abgeschlossenen (mechanischen) System (keine Kräfte wirken von oder nach außen) bleibt der Gesamtimpuls (Vektorsumme aller einzelnen Impulse) konstant.

Anders gesagt: in einem abgeschlossenen System kann Impuls weder erzeugt noch vernichtet werden.

Man kann die Impulserhaltung – zusammen mit der Energieerhaltung – verwenden, um Stoß-und Streuprozesse aller Art zu beschreiben. Impulserhaltung ist für das Funktionieren von Reaktionsmotoren (Düsenantrieb, Raketen) verantwortlich und spielt (meistens unbemerkt) im täglichen Leben eine entscheidende Rolle. [Impulserhaltung: Versuche– Impulsübertragung am Wagen; Rakete; Stöße auf der Luftkissenbahn; elastische und inelastische Stöße.]

Abbildung 0.7. Zentraler ideal elastischer Stoss



Zentraler ideal elastischer Stoß:

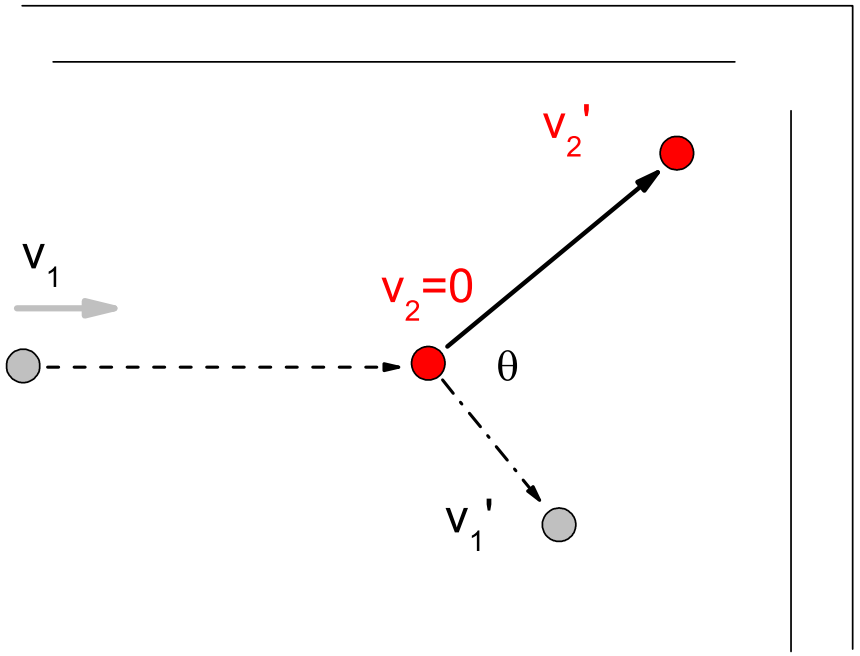
Anfangsbedingung: v_1 mit Masse m_1 in x-Richtung; $v_2 = 0\,m/s$ mit Masse m_2.

$$p_1 = p_1' + p_2' \quad Impulserhaltung$$
$$\frac{1}{2m_1}p_1^2 = \frac{1}{2m_1}p_1'^2 + \frac{1}{2m_2}p_2'^2 \quad Energieerhaltung$$

$$\begin{aligned}
\Rightarrow p_1' &= p_1 - p_2' \\
\Rightarrow p_1'^2 &= p_1^2 + p_2'^2 - 2p_1p_2' \\
\Rightarrow \frac{1}{2m_1}p_1^2 &= \frac{1}{2m_1}(p_1^2 + p_2'^2 - 2p_1p_2) + \frac{1}{2m_2}p_2'^2 \\
\Rightarrow \frac{1}{m_1}p_1p_1' &= p_2'^2(\frac{1}{2m_1} + \frac{1}{2m_2})
\end{aligned}$$

$$\Rightarrow p_2' = p_1\frac{2m_2}{m_1 + m_2}$$
$$\Rightarrow p_1' = p_1\frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}$$

Abbildung 0.8. Ideal elastischer Stoss



Bei gleichen Massen $m_1 = m_2$, $v_2 = 0\,m/s$ und ideal elastischem Stoß (nicht zentral) gilt:

$$\vec{p_1} = \vec{p_1'} + \vec{p_2'} \quad Impulserhaltung$$
$$\frac{1}{2m_1}p_1^2 = \frac{1}{2m_1}p_1'^2 + \frac{1}{2m_2}p_2'^2 \quad Energieerhaltung$$

$$
\begin{aligned}
\Rightarrow p_1^2 &= p_1'^2 + p_2'^2 \quad da\ m_1 = m_2 \\
\Rightarrow p_1^2 &= p_1'^2 + p_2'^2 + 2\vec{p_1'} \bullet \vec{p_2'} \\
\Rightarrow 2\vec{p_1'} \bullet \vec{p_2'} &= 0
\end{aligned}
$$

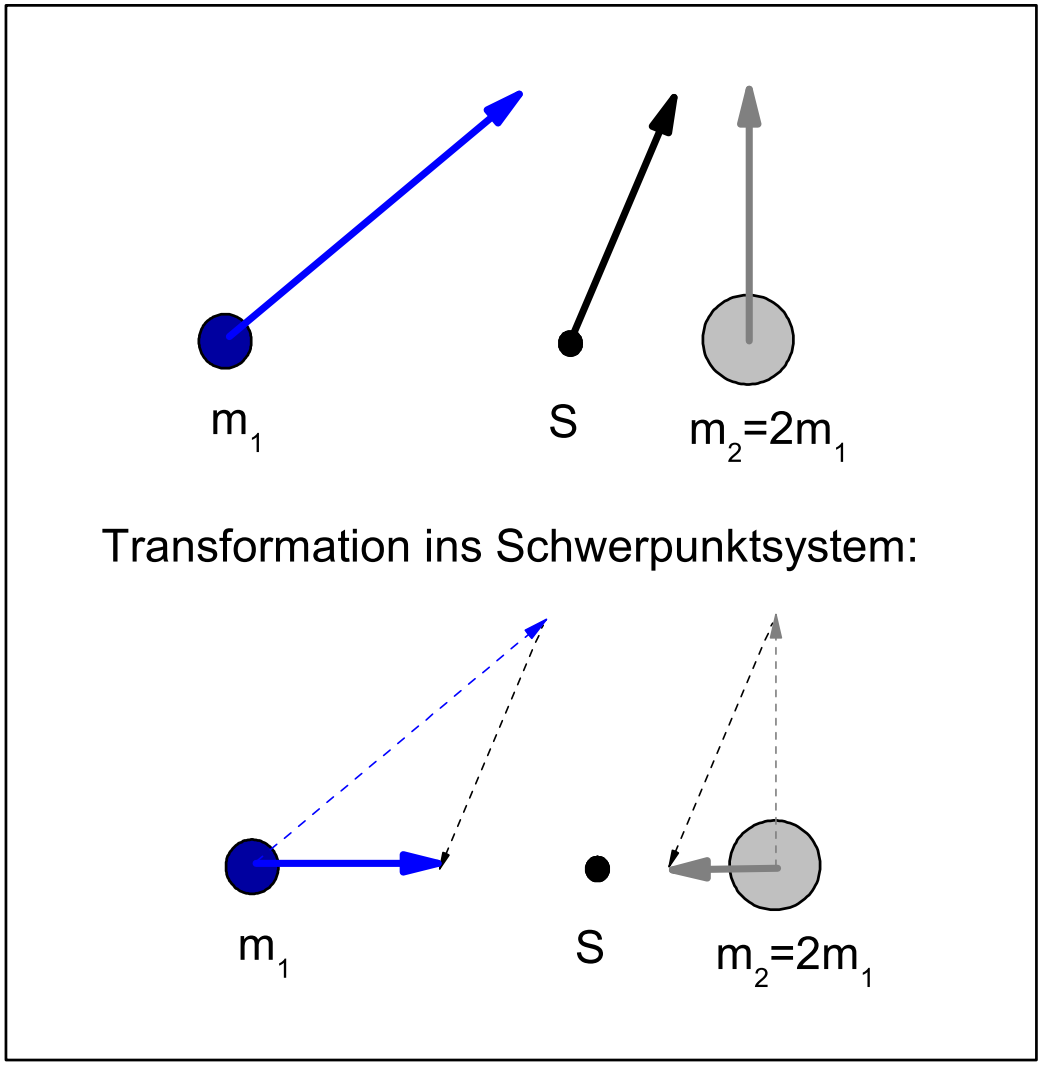
Also gilt: Stossen zwei gleichen Massen ideal elastisch, wovon eine vorher ruhte, so bewegen sie sich unter einem Winkel von 90 oder 270 Grad zueinander weiter oder aber eine ruht nach dem Stoss.

Das Null-Impuls-Bezugssystem

Betrachten wir zwei oder mehrere Körper die sich gegeneinander bewegen, so ist es oft sinnvoll ein Koordinatensystem zu wählen, in dem der Gesamtimpuls Null ist. Dies erhält man, indem von jedem Körper die Geschwindigkeit des Schwerpunktes aller betrachteten Körper $\vec{v_S}$ abzieht:

$$\vec{v_S} = \frac{\vec{p_{ges}}}{m_{ges}} = \frac{\sum_i (m_i v_i)}{\sum_i (m_i)} = \frac{m_1 v_1 + m_2 v_2}{m_1 + m_2}$$

Nun kann man den Koordinatenursprung z.B. in den Schwerpunkt oder einen der Körper legen und z.B. den Stossprozess berechnen. Am Ende muss das System wieder in das ursprüngliche zurückversetzt werden, indem $\vec{v_S}$ wieder zu allen Geschwindigkeiten dazu addiert wird. Das nennt man auch eine **Transformation von Bezugssystemen**.

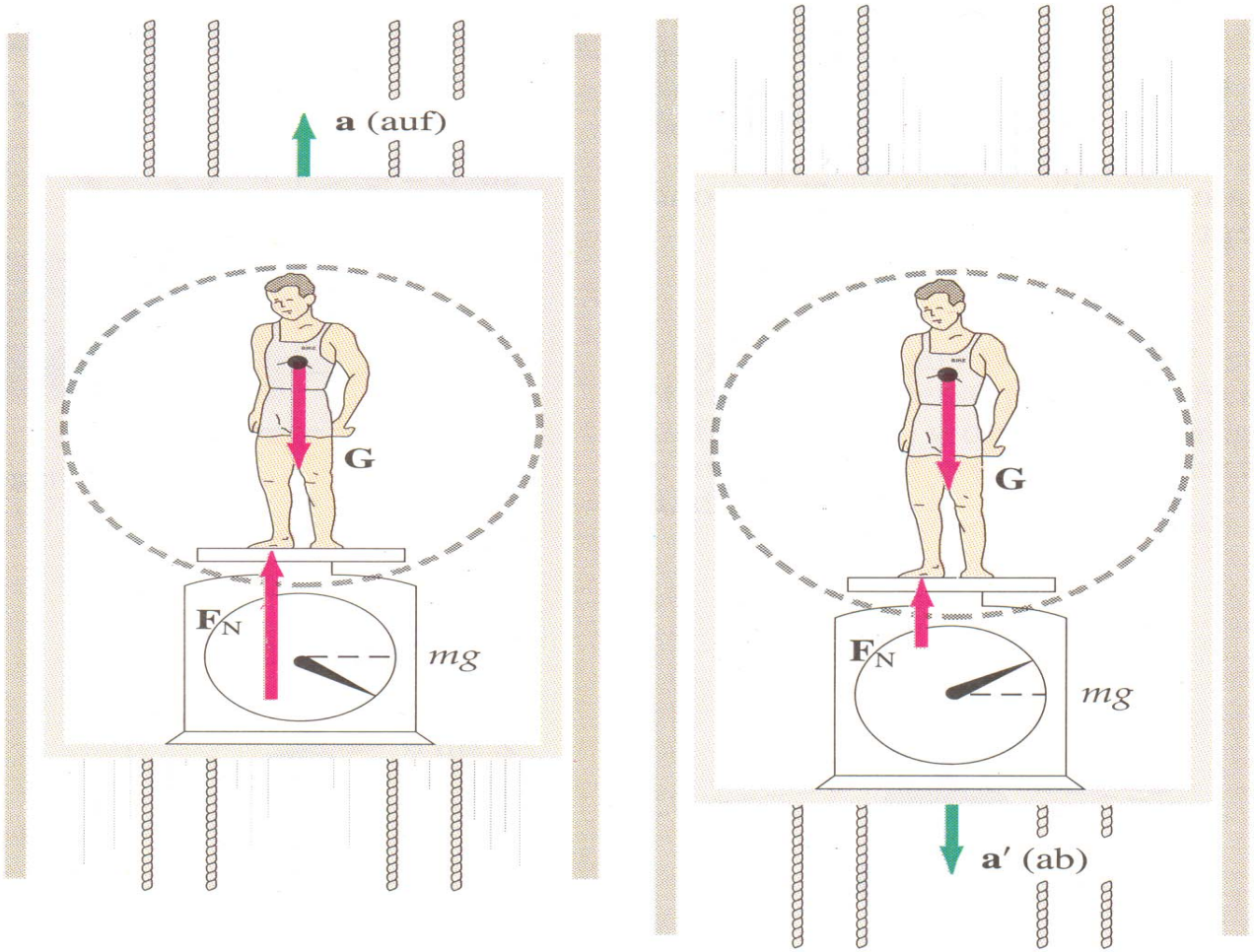

m1
S
m2=2m1
Transformation ins Schwerpunktsystem:
m1
S
m2=2m1

Bezugssysteme

Im Beobachtungssystem eines **Beobachters A** (z.B. ein im fahrenden Zug stehender Schaffner) bleibt ein ruhender Gegenstand (z.B. ein schlafender Fahrgast), auf den keine äußeren Kräfte wirken, nach dem ersten Newtonschen Axiom in Ruhe. Ein zweiter **Beobachters B**, der sich in einem Beobachtungssystem befindet, welches sich relativ zum ersten Beobachtungssystem mit **konstanter Geschwindigkeit $\vec{v}$** bewegt (z.B. ein Zeitungsverkäufer auf dem Bahnsteig), gilt ebenfalls das erste Newtonsche Axiom für den Fahrgast und Schaffner, da der Impuls, bzw. die Geschwindigkeit konstant bleibt.

Bewegt sich B **nicht** mehr mit **konstanter Geschwindigkeit**, sondern beschleunigt er, so wird es für B so aussehen, als würden Fahrgast und Schaffner beschleunigt, obwohl keine äußeren Kräfte wirken. Hier **gilt das erste Newtonsche Axiom** offensichtlich **nicht** mehr.

Bezugssysteme, in denen das erste Newtonsche Axiom gültig ist heissen **Inertialsysteme**.


a (auf)
G
F_N
mg
G
F_N
mg
a′ (ab)

Beschleunigte Bezugssysteme:

In beschleunigten Bezugssystem werden zusätzliche Kräfte beobachtet.

Die Person im aufwärts beschleunigten Fahrstuhl erfährt zur Erdbeschleunigung g zusätzlich die Aufwärtsbeschleunigung a. Die Waage, auf der die Person im Fahrstuhl steht, zeigt dann eine Normalkraft F_N die gegeben ist durch:

$$\vec{F_N} = m \cdot \vec{g} + m \cdot \vec{a} \Rightarrow F_N = m(g + a)$$

Im abwärts beschleunigten Fahrstuhl erfährt der Fahrgast die Abwärtsbeschleunigung a'. Damit ist die Normalkraft F_N:

$$\vec{F_N} = m \cdot \vec{g} + m \cdot \vec{a'} \Rightarrow F_N = m(g - a')$$

Rotierendes Bezugssystem

Ruhende Körper erfahren in einem rotierenden Bezugssystem ständig eine Kraft, die dafür sorgt, dass der Körper in der Rotationsbewegung bleibt. Diese Kraft heisst **Zentripetalkraft**. Setzt die Zentripetalkraft schlagartig aus, dann bewegen sich die Körper nach dem ersten Newtonschen Gesetz geradlinig und gleichförmig weiter.

Die Zentripetalkraft für einen Massenpunkt m, der im Kreis mit dem Radius r bewegt wird gilt:

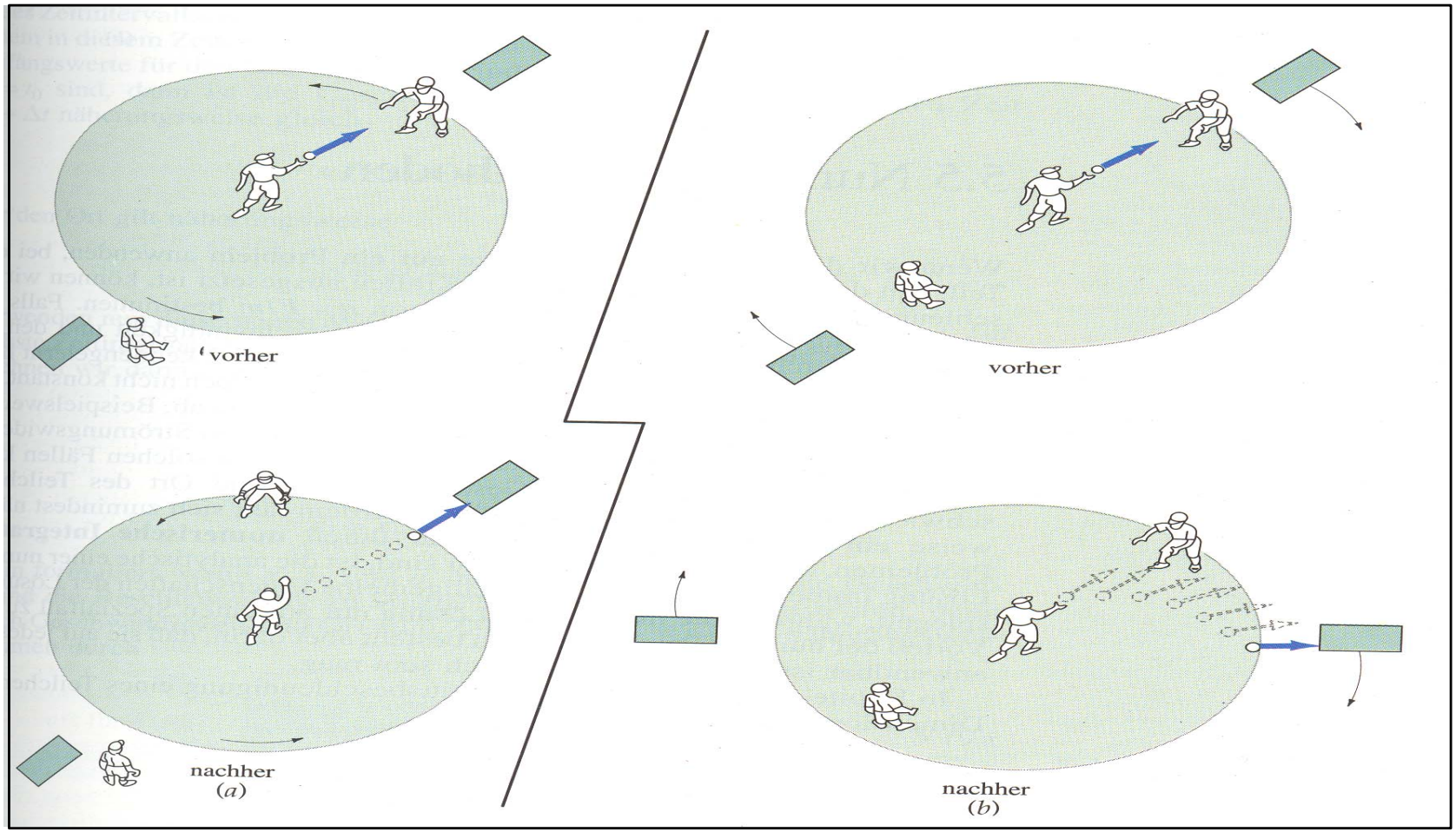
$$\vec{F_{Zp}} = -m \cdot \vec{a_{Zp}} = -m \cdot [\vec{\omega} \times \vec{v_B}] = -m \frac{v_B^2}{r} \frac{\vec{r}}{r}$$

Hierbei zeigt die Zentripetalbeschleunigung $\vec{a_{Zp}}$ immer zum Kreismittelpunkt (daher zentripetal) und ist $\vec{r}$ entgegengerichtet. Die Richtung der Bahngeschwindigkeit ändert sich stetig aufgrund der Zentripetalkraft. Die Kreisbewegung wird deshalb durch die Winkelgeschwindigkeit ω beschrieben:

$$\vec{\omega(t)} = \frac{Drehwinkeländerung}{Zeitänderung} = \frac{d\vec{\phi(t)}}{dt}$$

Verläuft die Drehung im Antiuhrzeigersinn, so ist die Winkelgeschwindigkeit positiv, verläuft sie im Uhrzeigersinn, so ist sie negativ. Der Richtungsvektor der Winkelgeschwindigkeit $\vec{\omega}$ ist parallel zur Drehachse.

Rotierendes Bezugssystem



Das Aktionsprinzip oder die Newton'sche Bewegungsgleichung

$$\boldsymbol{F} = m\boldsymbol{a} = \frac{d\boldsymbol{p}}{dt}$$

kann als Definition der Kraft angesehen werden (»wenn eine Masse m eine Beschleunigung a erfährt, wirkt auf sie eine Kraft F nach $F = ma$«).
Sie ist eine Differentialgleichung ($a(t) = \frac{d^2 s(t)}{dt^2}$ zweifache zeitliche Ableitung vom Ort s), die eine Bewegung mathematisch beschreibt.
Die Lösungen der Bewegungsgleichung erhalten wir durch Integration; in zwei Fällen ist das sehr einfach:

1. die Kraft $\boldsymbol{F}$ ist gleich Null, $\boldsymbol{F} = 0$. Dann ist die Geschwindigkeit konstant, $v = v_0$ (Trägheitsgesetz!), wir brauchen nur einmal zu integrieren:

   $$x(t) = v_0\, t + x(0).$$

   Die Konstante $x(0)$ (Anfangsort) ist eine Integrationskonstante.

2. die Kraft $\boldsymbol{F}$ ist konstant, z. B. gleich der Schwerkraft $\boldsymbol{F}_\mathrm{G}$. Dann ist auch die Beschleunigung konstant, wir haben:

$$\boldsymbol{a} = \left(\frac{\boldsymbol{F}_\mathrm{G}}{m}\right) = \boldsymbol{g} = \frac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{x}}{\mathrm{d}t^2}$$

und zweimaliges Integrieren ergibt:

$$\boldsymbol{x}(t) = \frac{\boldsymbol{g}}{2}t^2 + \boldsymbol{v}(0)t + \boldsymbol{x}(0)$$

(freier Fall). Hier erhalten wir zwei Integrationskonstanten, $\boldsymbol{v}(0)$ (Anfangsgeschwindigkeit) und $\boldsymbol{x}(0)$ (Anfangsort).

Bei Stoßprozessen (z. B. Schlagen eines Tennisballs durch den Schläger, Stößen von Billardkugeln) benutzt man den sogenannten Kraftstoß, um den Vorgang zu beschreiben:

$$\boldsymbol{F}\,\mathrm{d}t = \mathrm{d}\boldsymbol{p} = \mathrm{d}(m\boldsymbol{v}) = m\,\mathrm{d}\boldsymbol{v}$$

(momentan; letzte Gleichung gilt, wenn m konstant ist), oder (für den gesamten Vorgang):

$$\int \boldsymbol{F}(t)\,\mathrm{d}t = \int \mathrm{d}\boldsymbol{p} = \boldsymbol{p}(t) - \boldsymbol{p}(0)$$

(Kraftstoß = Impulsänderung). Dies ist nützlich, weil man meistens nicht die Einzelheiten der Kraftwirkung als Funktion der Zeit, $\boldsymbol{F}(t)$, kennt, aber die *Impulsänderung* leicht messen kann.

Wie ist es aber, wenn die **Masse m nicht zeitlich konstant** ist?
Beispiele sind: ein fliegendes Flugzeug oder eine Rakete (die Masse nimmt während des Fluges wegen Treibstoffverbrauch ständig ab) oder ein Teilchen, das zu hoher Geschwindigkeit beschleunigt wurde (Massenzunahme aufgrund der relativistischen Beziehung $E = mc^2$). In solchen Fällen muß man die Zeitabhängigkeit der Masse berücksichtigen, indem man sie in die Zeitableitung hineinnimmt:

$$\boldsymbol{F} = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{p}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}(m\boldsymbol{v})}{\mathrm{d}t} \,.$$

d. h. die Kraft ist die *zeitliche Änderung des Impulses.*

Eine Rakete, die kontinuierlich Masse (z.B. Gas) mit der Geschwindigkeit $\vec{v_A}$ nach hinten ausstösst wird beschleunigt. Dabei ändert sich die Masse der Rakete. Es gilt:

$$\begin{aligned}
\frac{dm \cdot \vec{v(t)}}{dt} + \frac{d\vec{p_{Gas}}}{dt} &= 0 \\
m\frac{d\vec{v(t)}}{dt} + \vec{v}\frac{dm}{dt} + \vec{v_{Gas}}\frac{dm_{Gas}(t)}{dt} &= 0 \\
m\frac{d\vec{v(t)}}{dt} + \vec{v}\frac{dm}{dt} - \vec{v_{Gas}}\frac{dm}{dt} &= 0 \\
m\frac{d\vec{v(t)}}{dt} + \vec{v}\frac{dm}{dt} - (\vec{v} + \vec{v_A})\frac{dm}{dt} &= 0 \\
\Rightarrow m\frac{d\vec{v(t)}}{dt} = \vec{v_A}\frac{dm}{dt} &= \vec{F_S} \\
m\frac{d\vec{v(t)}}{dt} + \vec{v_A}\frac{dm}{dt} &= \vec{F_{ext}}\,; \quad \textit{Raketengleichung}
\end{aligned}$$

Die Lösung der Raketengleichung für konstante Ausströmgeschwindigkeit $\vec{v_A}$ des Treibmittels, konstanter externer Gewichtskraft $\vec{F_{ext}} = m\vec{g}$, Anfangsmasse m_0 und Anfangsgeschwindigkeit $v(t = 0) = 0\,m/s$ lautet:

$$v(\vec{t}) = \vec{v_A} \cdot \ln \frac{m_0}{m(t)} - gt$$

Trägheitskräfte

Wir können die Newton'sche Gleichung auch in einer weiteren Weise interpretieren, als Kräftebilanz (*actio* = *reactio*): jede wirkende Kraft $\boldsymbol{F}$ ruft eine gleich große, engegengerichtete **Reaktionskraft** hervor. Bei einem Objekt der Masse m ist dies die Trägheitskraft $-m\boldsymbol{a}$, die jeder Änderung des Bewegungszustandes (Beschleunigung) widerstrebt.

Wie wir gesehen haben, ist bei der **ebenen Kreisbewegung** ständig eine Beschleunigung vorhanden (Zentripetalbeschleunigung), selbst wenn der *Betrag* der Bahngeschwindigkeit konstant bleibt. Diese Beschleunigung wird durch eine Kraft (**Zentripetalkraft**) hervorgerufen, sie erzeugt eine (gleich große, entgegengerichtete) Reaktionskraft (hier: Trägheitskraft), nämlich die **Zentrifugalkraft** oder Fliehkraft. Diese Kraft ist die Reaktion des massiven Objektes, welches aufgrund seiner Trägheit einfach geradeaus weiterfliegen würde (Trägheitsgesetz), jedoch durch die Zentripetalkraft gezwungen wird, auf der Kreisbahn zu bleiben. Die Zentrifugalkraft ist nach außen gerichtet (vom Mittelpunkt der Kreisbahn weg), sie ist gegeben durch :

$$\begin{aligned} \boldsymbol{F}_{\mathrm{Zf}} &= \text{Masse} \cdot (-)\text{Zentripetalbeschleunigung} \\ &= -m\,\boldsymbol{a}_{\mathrm{Zp}} = m\,\omega^2\,\boldsymbol{r} \equiv \frac{mv^2}{r}\left(\frac{\boldsymbol{r}}{r}\right) \end{aligned}$$

Kinematik der ebenen Kreisbewegung

Hier ist es sinnvoll, neben den linearen Größen s, v, a (die als Bahnstrecke s_B, Bahngeschwindigkeit v_B bzw. Bahnbeschleunigung a_B auftreten), auch *Winkel*größen zu verwenden: Bewegungswinkel φ [rad], Winkelgeschwindigkeit ω [rad/s], sowie Winkelbeschleunigung α [rad/s^2].

Tabelle 0.1. Kinematik der ebenen Kreisbewegung

Winkelgröße	lineare Größe	Verknüpfung
$\varphi(t)$ = Drehwinkel	s_B = Kreisbogen (Strecke auf der Bahn)	$s_\mathrm{B} = \lvert\varphi\rvert\lvert r\rvert$, $\varphi = s_\mathrm{B}/r$ r = Radius = konst.
$\omega(t)$ = Winkelgeschwindigkeit $\omega = \mathrm{d}\varphi/\mathrm{d}t$	v_B = Bahn-oder Tangentialgeschw. $v_\mathrm{B} = \mathrm{d}s_\mathrm{B}/\mathrm{d}t$	$\lvert v_\mathrm{B}\rvert = \lvert\omega\rvert\lvert r\rvert, \omega = v_\mathrm{B}/r$ (vektoriell: $v_\mathrm{B} = \omega \times r$)
$\alpha(t)$ = Winkelbeschleunigung $\alpha = \mathrm{d}\omega/\mathrm{d}t = \mathrm{d}^2\varphi/\mathrm{d}t^2$	a_B = Bahn-oder Tangentialbeschl. $a_\mathrm{B} = \mathrm{d}v_\mathrm{B}/\mathrm{d}t = \mathrm{d}^2s_\mathrm{B}/\mathrm{d}t^2$ Betragsänderung von v_B	$\lvert a_\mathrm{B}\rvert = \lvert\alpha\rvert\lvert r\rvert, \alpha = a_\mathrm{B}/r$ (vektoriell: $a_\mathrm{B} = \alpha \times r$)

Auch **ohne Winkelbeschleunigung** gibt es eine *Zentripetalbeschleunigung* a_{Zp}:

$$a_{\mathrm{Zp}} = |v_{\mathrm{B}}| \frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t}$$

aufgrund der ständigen *Richtungs*änderung von $\boldsymbol{v}_{\mathrm{B}}$. Sie ist im Betrag gegeben durch:

$$|a_{\mathrm{Zp}}| = \frac{v_{\mathrm{B}}^2}{r} = \omega^2 \, r$$

und zeigt immer zum Kreismittelpunkt hin ($\boldsymbol{a}_{\mathrm{Zp}} \parallel -\boldsymbol{r}$, daher »zentripetal«).

Zusammenfassung – Kinematik der ebenen Kreisbewegung

Bewegungsgleichungen und Lösungen

- gleichförmig:

  $$\omega(t) = \omega_0; \qquad \frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t} = \omega_0;$$

  Lösung:

  $$\varphi(t) = \omega_0 \, t + \varphi(0) \quad \text{oder} \quad s_{\mathrm{B}}(t) = v_{B0} \, t + s_{\mathrm{B}}(0)$$

- gleichmäßig beschleunigt:

  $$\alpha(t) = \alpha_0; \qquad \frac{\mathrm{d}^2\varphi}{\mathrm{d}t^2} = \alpha_0;$$

  Lösung:

  $$\varphi(t) = \left(\frac{\alpha_0}{2}\right) t^2 + \omega(0) \, t + \varphi(0)$$

Analogie Translation (geradlinige Bewegung) und Rotation (Drehbewegung)

Tabelle 0.2. Größen und Einheiten für die Translation (links) und die Rotation (rechts).

Größe	Einheit	Größe	Einheit
Weg s, ds	m	Winkel φ, $d\varphi$	Radiant (rad)
Geschwindigkeit $v = ds/dt$	m/s	Winkelgeschwindigkeit $\omega = d\varphi/dt$	rad/s = 1/s
Beschleunigung $a = dv/dt = d^2s/dt^2$	m/s^2	Winkelbeschleunigung $a = d\omega/dt = d^2\varphi/dt^2$	rad/s^2 = 1/s^2
Masse (Trägheit) m	kg	(Massen)Trägheitsmoment $\Theta = \Sigma\, mr^2$	kg m^2
Kraft $F = ma = dp/dt$	N = kg m/s^2	Drehmoment $M = \Theta\alpha = dL/dt$	Nm = kg m^2/s^2
(Linear-)Impuls $p = mv$	kg m/s	Drehimpuls $L = \Theta\omega$	kg m^2/s = Nms
Arbeit $dW = \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s}$	J = N m	Arbeit $dW = \mathbf{M} \cot d\varphi$	J = N m
kinetische Energie $E_{\text{kin}} = (m/2)v^2$	J= kg(m/s)^2	Rotationsenergie $E_{\text{rot}} = (\Theta/2)\omega^2$	J = (kgm^2)/s^2
Leistung $P = dW/dt = \mathbf{F} \cdot \mathbf{v}$	W = J/s	Leistung $P = dW/dt = \mathbf{M} \cdot \omega$	W = J/s
Kraftkonstante $D = \lvert F/s \rvert$	N/m	Winkel-richtmoment $D* = \lvert M/\varphi \rvert$	Nm
Spannarbeit $W = (D/2)s^2$	Nm = J	Spannarbeit $W = (D^*/2)\varphi^2$	Nm = J

Dynamik der ebenen Kreisbewegung

Eine Kreis- oder Rotationsbewegung entsteht, wenn ein *Drehmoment*

$$\boldsymbol{M} = \text{Kraftarm} \times \text{Kraft} = \boldsymbol{r}\boldsymbol{F}$$

um den Aufhängungspunkt des Kraftarms $\boldsymbol{r}$ (von der Drehachse) wirkt; die Einheit des Drehmoments $\boldsymbol{M}$ ist Nm oder $\mathrm{kg\,m^2/s^2}$. Um den vektoriellen Charakter von $\boldsymbol{F}, \boldsymbol{r}$ und $\boldsymbol{M}$ auszudrücken und die Richtungsabhängigkeit von $\boldsymbol{F}$ und $\boldsymbol{r}$ zu berücksichtigen, verwenden wir das *Vektorprodukt*:

$$\boldsymbol{M} = \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{F}$$

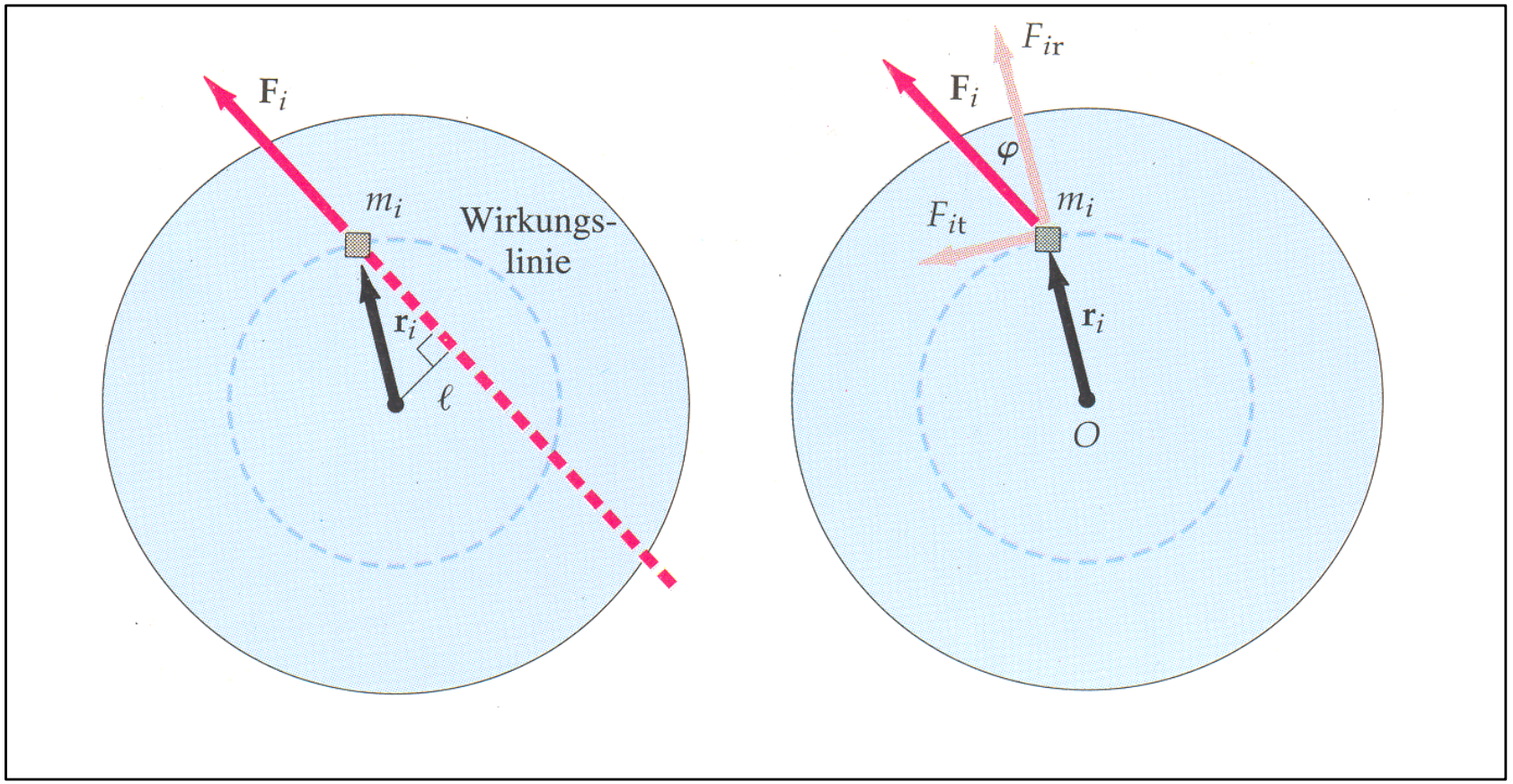
wobei $\boldsymbol{C} = \boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B}$ bedeutet: »$\boldsymbol{C}$ ist ein Vektor, der senkrecht auf $\boldsymbol{A}$ und $\boldsymbol{B}$ steht und den Betrag $|C| = |A|\,|B| \sin\vartheta$ besitzt, mit ϑ = Winkel zwischen $\boldsymbol{A}$ und $\boldsymbol{B}$«. Die Richtung von $\boldsymbol{M}$ ist also parallel zur Drehachse.

Um komplizierte Bewegung im Gravitationsfeld der Erde in Drehbewegung und translatorische Bewegung zu zerlegen, definiert man den Schwerpunkt x_S des Systems:

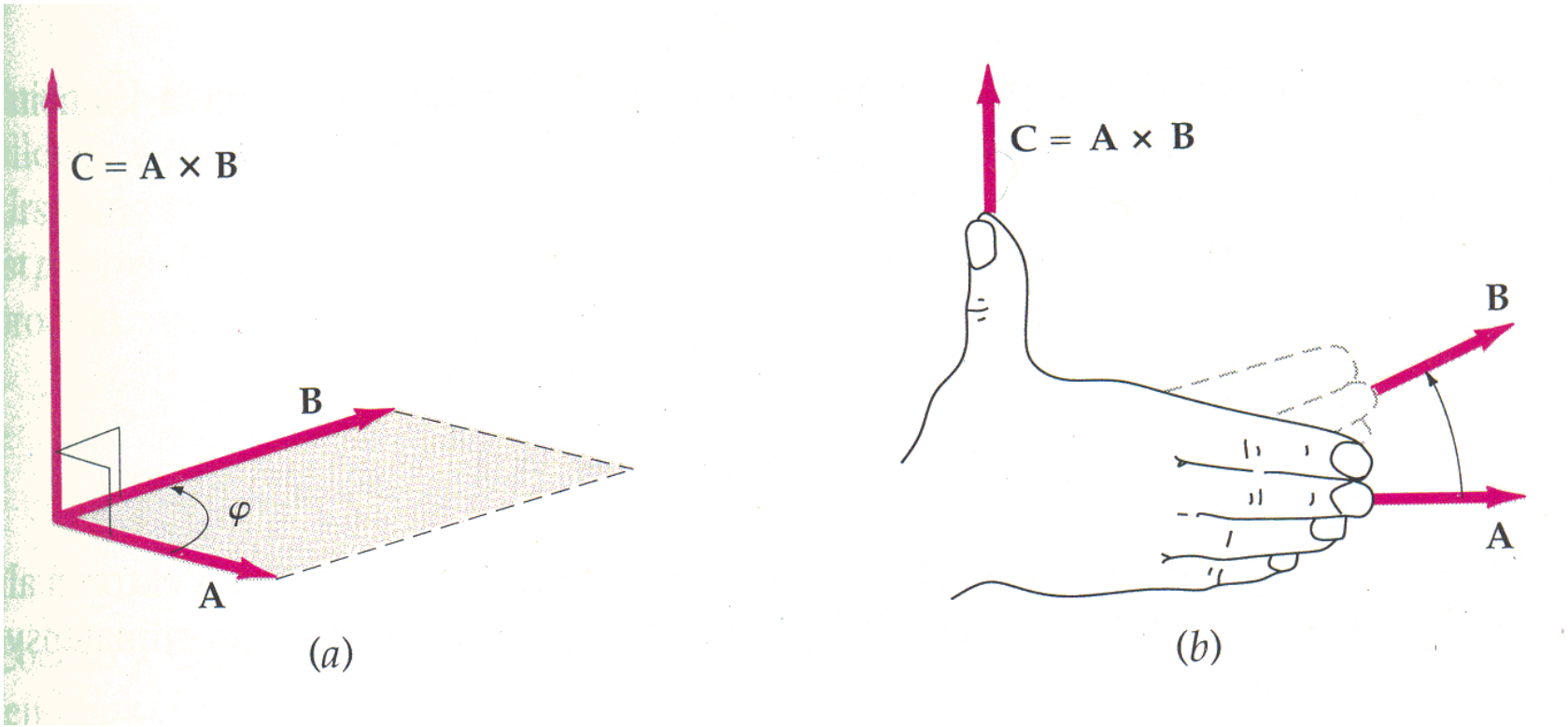
$$x_S = \sum_i \frac{m_i \cdot x_i}{m_{ges}}$$

Der Schwerpunkt ist der Punkt, an dem die Gewichtskraft, die auf den Körper wirkt zum Drehmoment Null führt. Damit ist die Schwerpunktsbewegung eine reine translatorische Bewegung.

Drehmoment


$\mathbf{F}_i$
m_i
Wirkungs-
linie
$\mathbf{r}_i$
ℓ
F_{ir}
$\mathbf{F}_i$
φ
F_{it}
m_i
$\mathbf{r}_i$
O

Kreuzprodukt



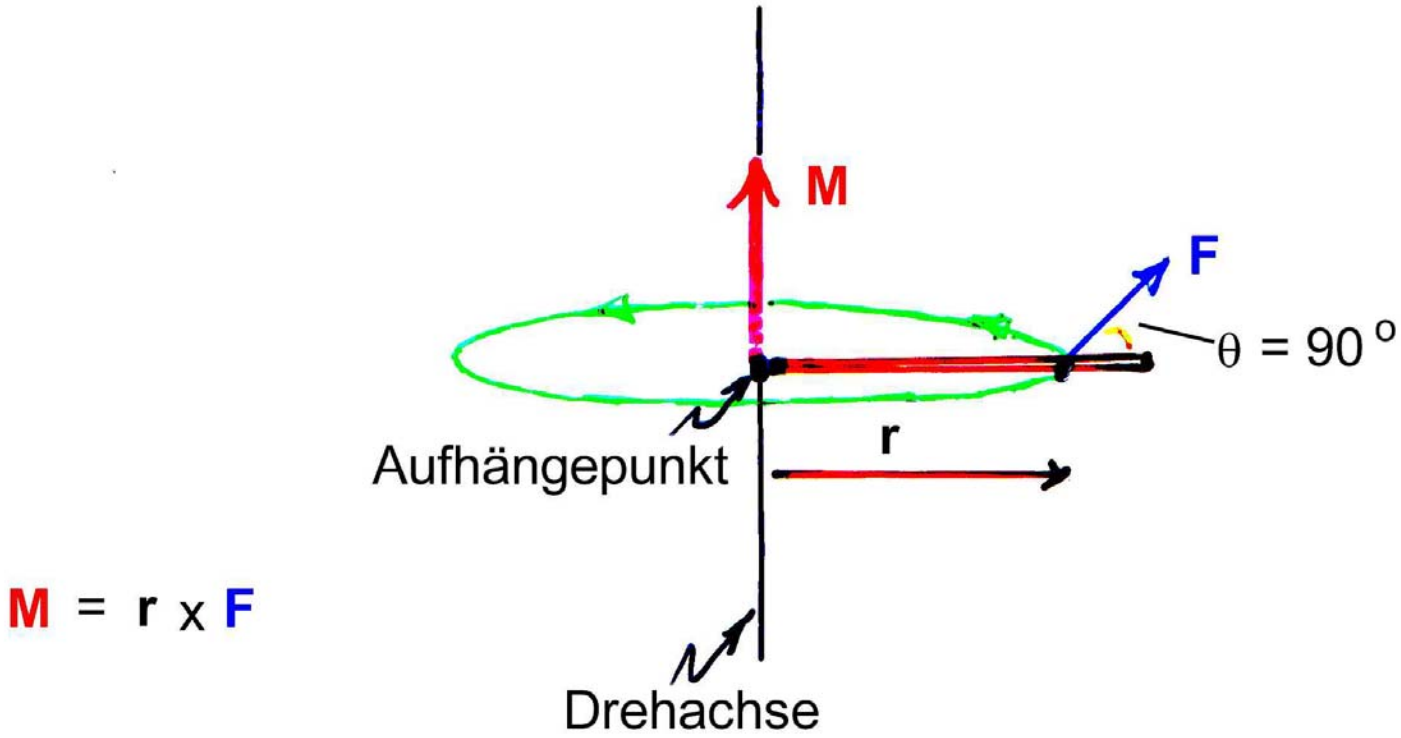


Abbildung 0.9. Rechte-Hand-Regel: (hier abgebildet für den speziellen Fall, daß die Kraft $\boldsymbol{F}$ senkrecht zum Kraftarm $\boldsymbol{r}$ steht, d. h. $\vartheta = 90\,^\circ$)

Newton'sche Axiome für die Drehbewegung

Trägheitsprinzip — ein (massives) Objekt, worauf keine Drehmomente wirken, beharrt in seinem jeweiligen Zustand der gleichförmigen Drehbewegung.

Aktionsprinzip — wenn ein Drehmoment $\boldsymbol{M}$ auf ein Objekt wirkt, erzeugt es eine Winkelbeschleunigung $\boldsymbol{\alpha}$ (rad/s^2), nach der Bewegungsgleichung

$$\boldsymbol{M} = \Theta\,\boldsymbol{\alpha}$$

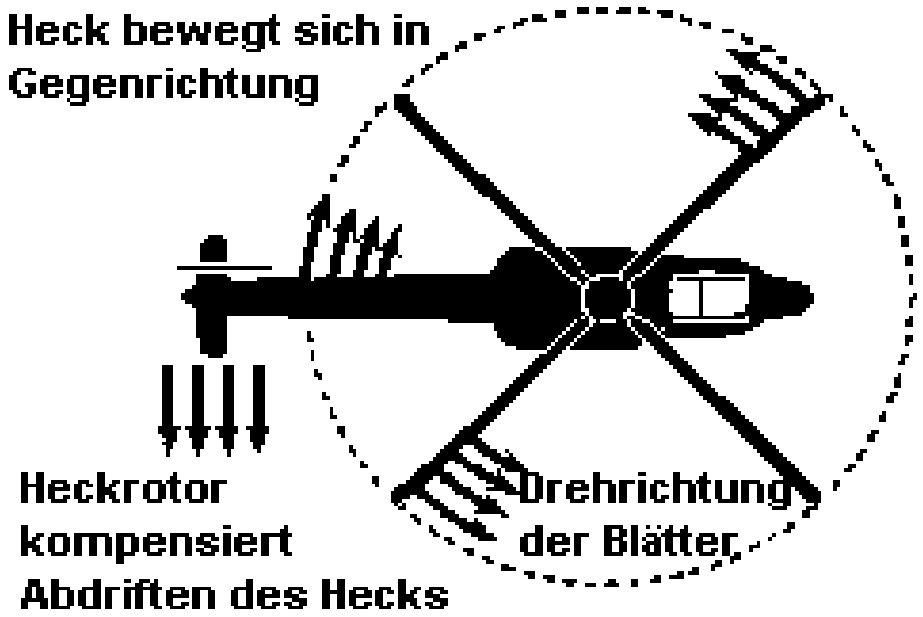
Hierbei ist Θ das Trägheitsmoment des Objektes. Aus den Einheiten der obigen Bewegungsgleichung sieht man, daß Θ die Einheit $\mathrm{N\,m\,s^2} = \mathrm{kg\,m^2}$ haben muß. Für eine Punktmasse m im Abstand r von der Drehachse gilt

$$\Theta = m\,r^2$$

actio = reactio — ein wirkendes Drehmoment $\boldsymbol{M}$ ruft immer ein gleich großes, entgegengerichtetes Gegenmoment (Reaktionsmoment)

$$\boldsymbol{M}_\mathrm{R} = -\boldsymbol{M}$$

hervor (z. B. Gegendrehung eines Hubschraubers).


Heck bewegt sich in
Gegenrichtung
Heckrotor
kompensiert
Abdriften des Hecks
Drehrichtung
der Blätter

Der Drehimpuls

Die Bewegungsgleichung

$$\boldsymbol{M} = \Theta\,\boldsymbol{\alpha}$$

für die Drehbewegung kann genau analog zur Newton'schen Gleichung für eine lineare Bewegung durch 2-maliges Integrieren gelöst werden.

Analog zum Linearimpuls $\boldsymbol{p} = m\boldsymbol{v}$ definieren wir auch den Drehimpuls:

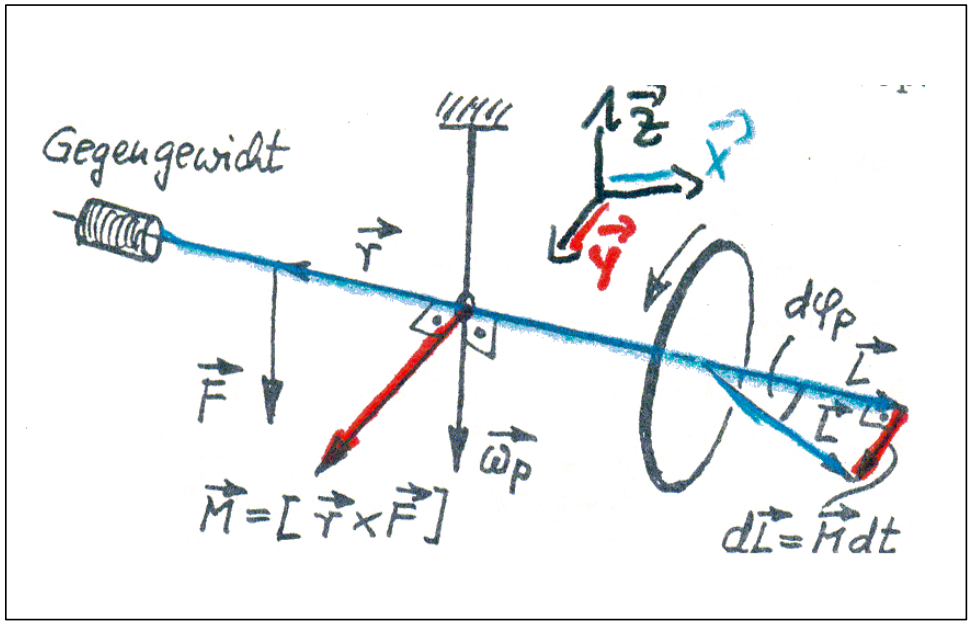
$$\boldsymbol{L} = \Theta\,\boldsymbol{\omega} = m\,\boldsymbol{v}_{\mathrm{B}} \times \boldsymbol{r}$$

(die letzte Definition gilt für eine Punktmasse m auf einer Kreisbahn vom Radius $\boldsymbol{r}$ mit der Bahngeschwindigkeit $\boldsymbol{v}_{\mathrm{B}}$). Hier gilt ebenfalls ein Erhaltungssatz, die *Drehimpulserhaltung*. Die allgemeine Form der Bewegungsgleichung für die Drehbewegung lautet nun:

$$\boldsymbol{M} = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{L}}{\mathrm{d}t}\,.$$

Wird der Drehimpuls $\boldsymbol{L}$ eines Gegenstandes (z.B. ein Kreisel) durch ein Drehmoment $\boldsymbol{M}$ verändert, so kann die Änderung in Richtung von $\boldsymbol{L}$ zeigen, und damit den Betrag des Drehimpulses erhöhen oder senkrecht zu $\boldsymbol{L}$ wirken und nur die Richtung ändern.

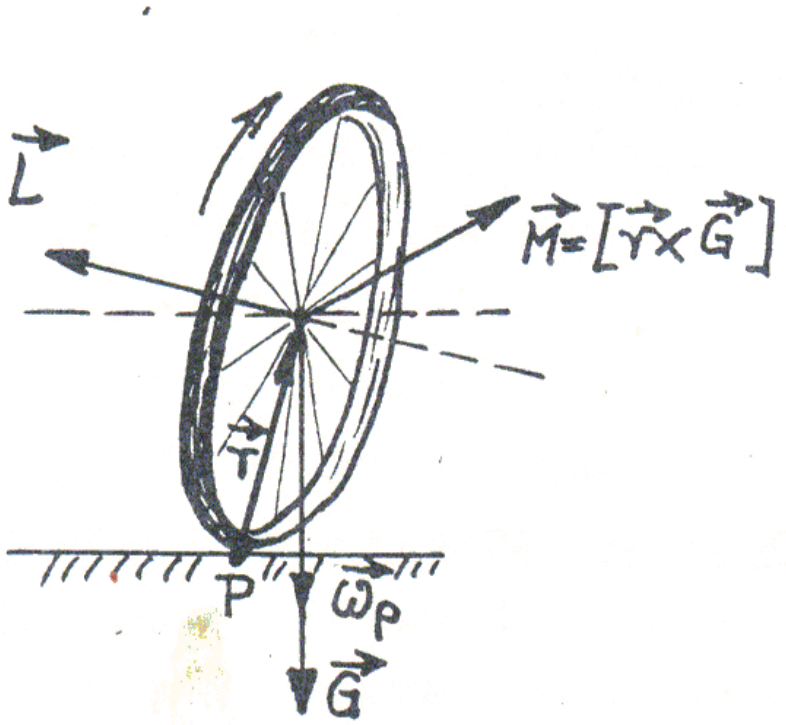
Kreisel



$\boldsymbol{M} = \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{F}$, der Wirkung dieser Kraft weicht der Kreisel senkrecht zur Kraftrichtung aus. Er führt eine **Präzession** aus, wobei $\boldsymbol{\omega_p}$ senkrecht auf $\boldsymbol{M}$ und $\boldsymbol{L}$ steht.

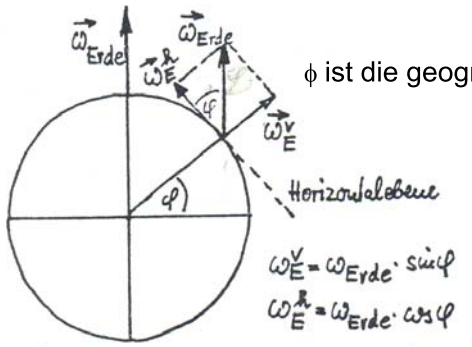
$$\boldsymbol{M} = \boldsymbol{\omega_p} \times \boldsymbol{L} \quad \boldsymbol{\omega_p} = \frac{\boldsymbol{M}}{\Theta\boldsymbol{\omega}}$$

Freihändig Fahrrad fahren



Kippt das Rad nach rechts, so wird die Vorderachse durch das Drehmoment $\boldsymbol{M} = \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{F_G}$ im Uhrzeigersinn gedreht. Die Vorderachse weicht dieser Drehung durch eine Präzession mit lotrechter Winkelgeschwindigkeit $\boldsymbol{\omega_p}$ aus, d.h. die Radachse dreht sich von oben gesehen nach rechts.

Corioliskraft



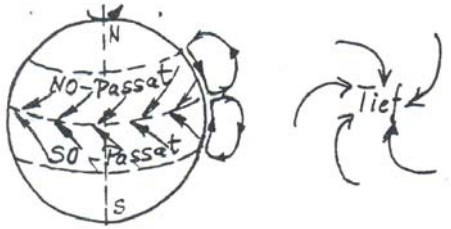
ϕ ist die geographische Breite

Corioliskraft:

$\mathbf{F}_c = -2m(\omega \times \mathbf{v})$, allgemein

$\mathbf{F}_{cV} = -2m(\omega_{EV} \times \mathbf{v})$, Vertikalebene

$\mathbf{F}_{cH} = -2m(\omega_{EH} \times \mathbf{v})$, Horizontalebene



Die vertikale Komponente der Corioliskraft führt auf der Nordhalbkugel zu: (i) Steilere Rechtsufer der Flüsse, (ii) stärkere Abnutzung der linken Schienenseite bei Eisenbahnschienen, (iii) Rechtsablenkung der Winde aus den Subtropen zum Äquator (NO-Passat) (iv) Winde im Tiefdruckgebiet laufen im Uhrzeigersinn.

Die horizontale Komponente führt dazu, dass ein lotrecht fallender Körper nach Osten und ein nach oben bewegter Körper nach Westen abgelenkt wird. (Siehe auch Foucaultsches Pendel)

Trägheitsmomente

Das Trägheitsmoment Θ eines Körpers, der durch ein System von Massepunkten beschrieben werden kann ist:

$$\Theta = \sum_i m_i r_i^2$$

Besteht ein Körper nicht aus einzelnen diskreten Massepunkten, sondern hat eine kontinuierliche Masseverteilung, so ist die Summation durch Integration zu ersetzen:

$$\Theta = \int_{Volumen} r^2 dm$$

Beispiel Vollzylinder:

$$\begin{aligned} dm &= 2\pi r h \rho dr \quad h: \, Höhe \; \rho: \, konstante \, Dichte \\ \Theta &= 2\pi h \rho \int_0^R r^3 dr = 2\pi R^4 h \rho \\ \Theta &= \frac{1}{2} m R^2 \quad m: \, Gesamtmasse \; R: \, Radius \end{aligned}$$

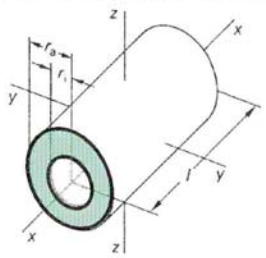
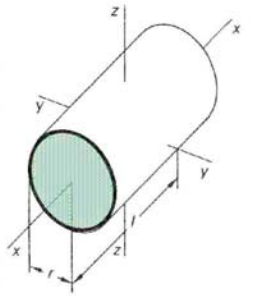
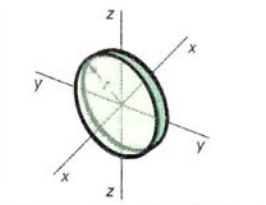
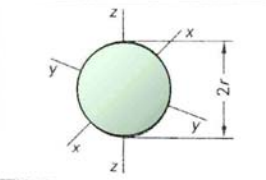
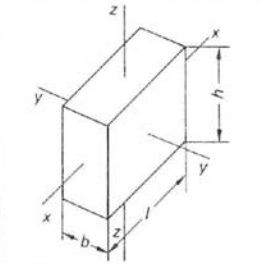
	Hohlzylinder	$\Theta_x = (m/2)[r_a^2+r_i^2]$ $\Theta_y = \Theta_z = (m/4)[r_a^2+r_i^2+l^2/3]$
	dünnwandiger Hohlzylinder	$\Theta_x = mr^2$ $\Theta_y = \Theta_z = (m/4)[2r^2+l^2/3]$
	Vollzylinder	$\Theta_x = (m/2)r^2$ $\Theta_y = \Theta_z = (m/4)r^2+(m/12)\,l^2$
	dünne Scheibe ($l \ll r$)	$\Theta_x = (m/2)r^2$ $\Theta_y = \Theta_z = (m/4)r^2$
	dünner Stab ($l \gg r$) unabhängig von der Form des Querschnitts	$\Theta_x = (m/2)r^2$ $\Theta_y = \Theta_z = (m/12)\,l^2$
	dünner Ring	$\Theta_x = m\,r^2$ $\Theta_y = \Theta_z = (m/2)r^2$
	Kugel, massiv	$\Theta_x = \Theta_y = \Theta_z = (2m/5)r^2$
	dünne Kugelschale	$\Theta_x = \Theta_y = \Theta_z = (2m/3)r^2$
	Quader	$\Theta_x = (m/12)[b^2+h^2]$ $\Theta_y = (m/12)[l^2+h^2]$ $\Theta_z = (m/12)[l^2+b^2]$

Abbildung 0.10. Beispiele für das Trägheitsmoment Θ von verschiedenen Körpern

Statik

Die Statik behandelt die Kräfte und Drehmomente die wirken, wenn sich ein Körper im **ruhenden Zustand** oder im **Gleichgewicht** befindet. Hierbei handelt es sich stets um ein Gleichgewicht der Kräfte $\boldsymbol{F}$ und der Drehmomente $\boldsymbol{M}$, die sich gegenseitig aufheben:

$$\sum_i \boldsymbol{F_i} = 0$$
$$\sum_i \boldsymbol{M_i} = 0$$

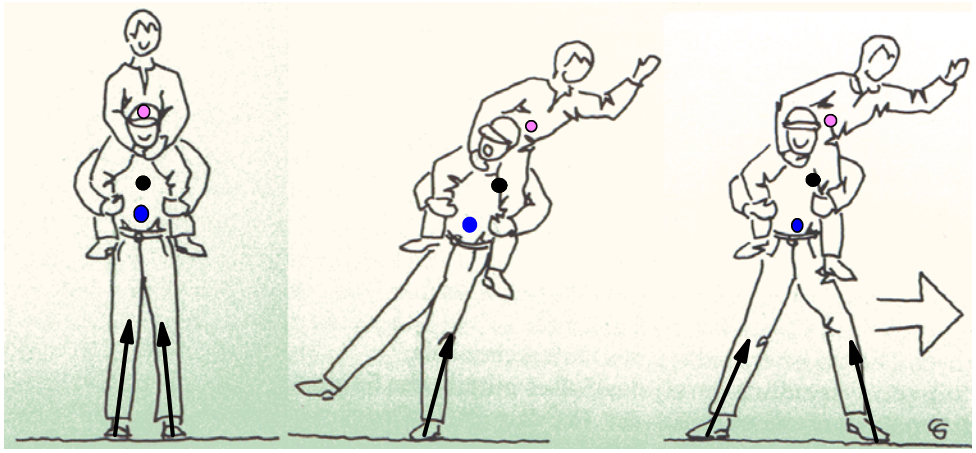
Die Kräfte und Drehmomente im Gleichgewicht wirken auf den Körper (z.B. Baum, Leiter) und müssen von diesem übertragen werden. Werden die Kräfte zu gross kann der Körper irreversibel verformt und sogar zerstört werden.

Wird das Gleichgewicht gestört findet Bewegung statt.

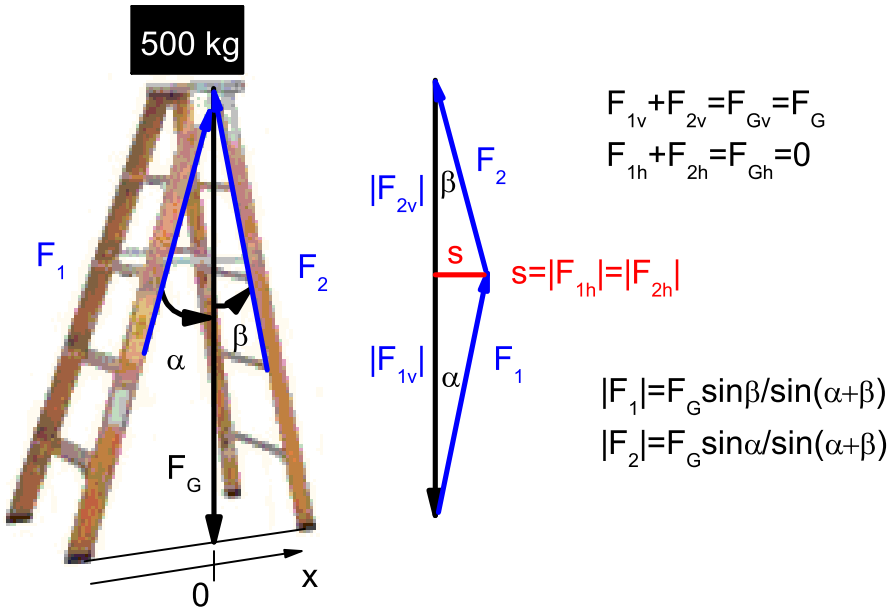
Eine Leiter, die mit einem Gewicht von 500 kg belastet ist, überträgt die Gewichtskraft, durch die Leiterfüsse auf den Boden. Die Leiter erzeugt somit eine Gegenkraft zur Gewichtskraft. Es gilt:

Schiefer Baum

Gleichgewicht und Störung des Gleichgewichtes



Kraftverteilung



$F_{1v}+F_{2v}=F_{Gv}=F_G$

$F_{1h}+F_{2h}=F_{Gh}=0$

$|F_1|=F_G \sin\beta/\sin(\alpha+\beta)$

$|F_2|=F_G \sin\alpha/\sin(\alpha+\beta)$

$$\boldsymbol{F_1} + \boldsymbol{F_2} = \boldsymbol{F_G} \quad \boldsymbol{F_G} : \ Gewichtskraft$$

$$|F_{1v}| + |F_{2v}| = |F_{Gv}| = |F_G|$$

$$F_{1h} = -F_{2h}$$

$$\frac{s}{|F_{1v}|} = \tan\alpha, \quad \frac{s}{|F_{2v}|} = \tan\beta$$

$$\frac{|\boldsymbol{F_1}|}{|\boldsymbol{F_2}|} = \frac{\tan\beta}{\tan\alpha}$$

$$|\boldsymbol{F_1}| = \frac{|F_{1v}|}{\cos\alpha}, \quad |\boldsymbol{F_2}| = \frac{|F_{2v}|}{\cos\beta}$$

$$|\boldsymbol{F_2}| = \boldsymbol{F_G}(\frac{\frac{\tan\alpha}{\tan\alpha+\tan\beta}}{\cos\beta})$$

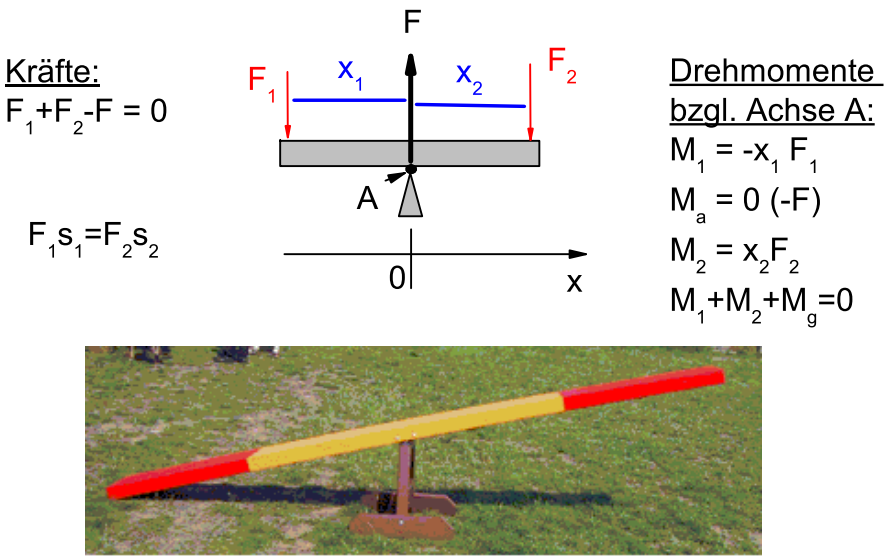
$$\sin\alpha + \beta = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta$$

$$|\boldsymbol{F_2}| = F_G(\frac{\sin\alpha}{\sin\alpha+\beta})$$

$$|\boldsymbol{F_1}| = F_G(\frac{\sin\beta}{\sin\alpha+\beta})$$

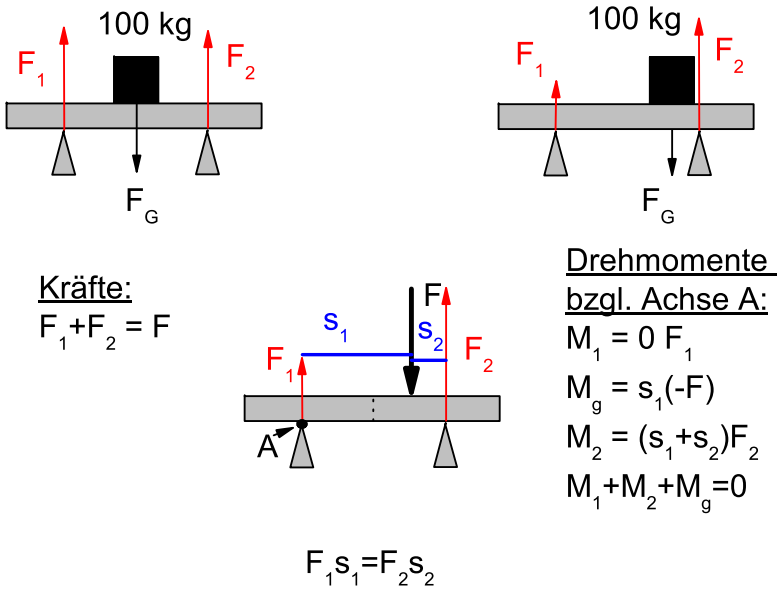
Gleichgewicht einer Wippe

2 Personen auf einer Wippe im Gleichgewicht:



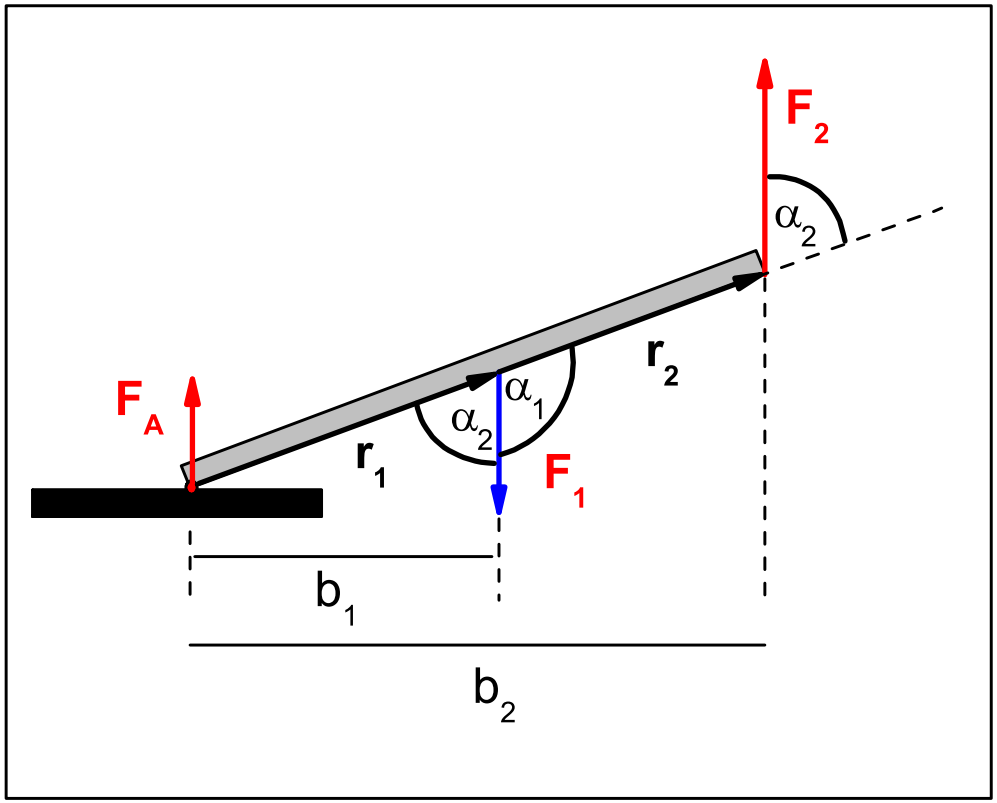
Hieraus ersieht man das **Hebelgesetz**, dass das Verhältniss der Kräfte gleich dem umgedrehten Verhältniss der Hebelarmlängen ist.

Krafteinwirkung auf Auflagen



Mit Hilfe der Gleichgewichtsgleichungen, kann die wirkende Kraft auf Teile eines Gesamtkörpers berechnet werden. Dies ist wichtig z.B. beim Bau eines Fachwerkhauses oder eines Gerüstes (Statiker). Um die Stabilität von Gebäuden zu gewährleisten, müssen die Kräfte und Drehmomente stets so gering sein, dass das Gebäude nicht stark verformt oder gar zerstört wird.

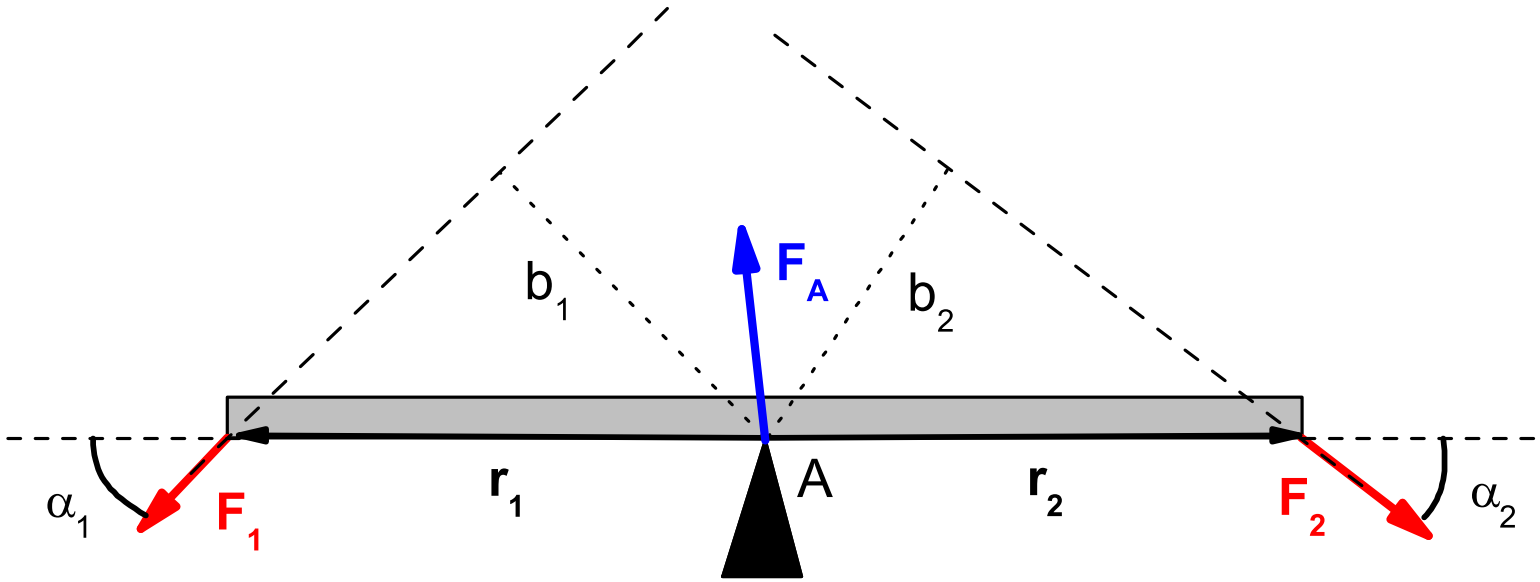
Einarmiger Hebel



Für den Fall des einarmigen Hebels lassen sich aus den Gleichgewichtsbedingungen folgende Kraftverhältnisse herleiten:

$$
\begin{aligned}
\sum_i \boldsymbol{F_i} &= \boldsymbol{F_A} + \boldsymbol{F_1} + \boldsymbol{F_2} = 0 \\
\Rightarrow \boldsymbol{F_A} &= -(\boldsymbol{F_1} + \boldsymbol{F_2}) \\
\sum_i \boldsymbol{M_i} &= \boldsymbol{r_1} \times \boldsymbol{F_1} + \boldsymbol{r_2} \times \boldsymbol{F_2} = 0 \\
&= r_1 F_1 \sin\alpha_1 - r_2 F_2 \sin\alpha_2 \\
&= r_1 F_1 \sin\alpha_2 - r_2 F_2 \sin\alpha_2 = 0 \\
\textit{mit} \quad r_1 \sin\alpha_2 &= b_1 \\
\textit{und} \quad r_2 \sin\alpha_2 &= b_2 \\
\Rightarrow b_1 F_1 &= b_2 F_2
\end{aligned}
$$

Zweiarmiger Hebel

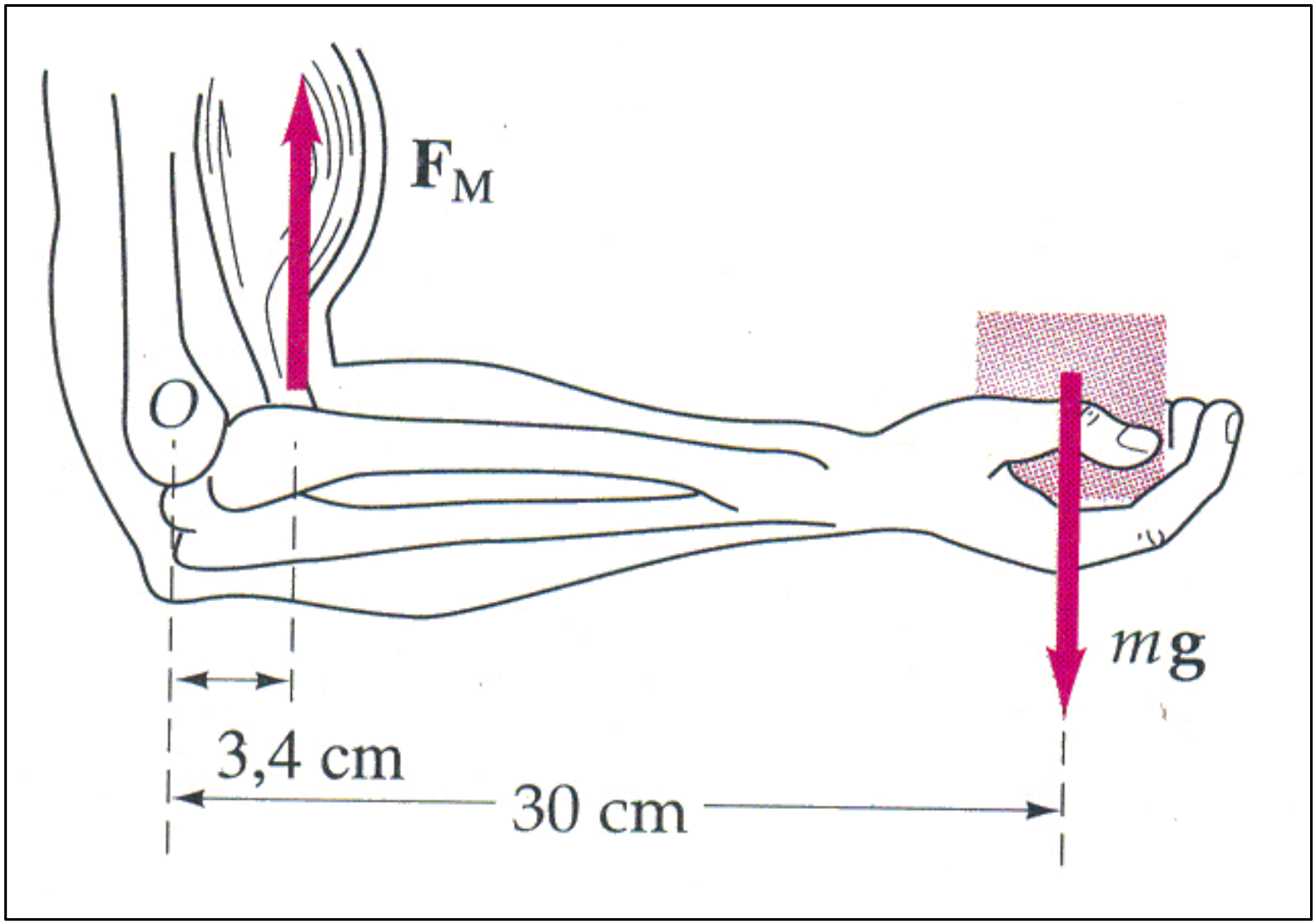


Für einen zweiarmigen Hebelarm folgt:

$$\begin{aligned}
\sum_i \boldsymbol{F_i} &= \boldsymbol{F_A} + \boldsymbol{F_1} + \boldsymbol{F_2} = 0 \\
\sum_i \boldsymbol{M_i} &= \boldsymbol{r_1} \times \boldsymbol{F_1} + \boldsymbol{r_2} \times \boldsymbol{F_2} = 0 \\
&= r_1 F_1 \sin\alpha_1 - r_2 F_2 \sin\alpha_2 \\
Kraftarme: \quad b_1 &= r_1 \sin\alpha_1 \\
b_2 &= r_2 \sin\alpha_2 \\
\Rightarrow F_1 b_1 &= F_2 b_2
\end{aligned}$$

Also gilt das Hebelgesetz: $F_1 b_1 = F_2 b_2$

Der menschliche Arm



Verformung, Elastizität

Wie biegen sich die Balken? Bisher haben wir angenommen, daß die Materie entweder aus punktförmigen Massen besteht (geradlinige Bewegung, Kreisbewegung) oder vollständig starr ist (Drehbewegung des »starren Körpers«). In Wirklichkeit hat feste (sowie z.T. auch flüssige) Materie eine gewisse Elastizität; das heißt, sie widerstrebt Form- bzw. Volumenänderungen durch eine äußere Kraft und gewinnt ihre ursprüngliche Form und Größe wieder, sobald diese Kraft nicht mehr wirkt. Dabei wird die aufgewendete Arbeit (Spannarbeit, Volumenarbeit) wieder freigesetzt.

Die drei verschiedenen Aggregatzustände der Materie (fest, flüssig, gasförmig) zeigen sehr unterschiedliche Eigenschaften bzgl. ihrer Elastizität (siehe Tabelle 0.3). Den flüssigen sowie den gasförmigen Zustand

Tabelle 0.3. Aggregatzustände und ihre Elastizitäten

Aggregatzustand	Formelastizität	Volumenelastizität
fest	Ja	Ja
flüssig	Nein	Ja
gasförmig	Nein	Nein

werden wir später betrachten; zuerst schauen wir die Elastizität der festen Materie an. Grundsätzlich gibt es vier Arten der Verformungskräfte:

1. Eine Zugkraft oder Druckkraft, die eindimensional (in einer bestimmten Richtung) wirkt. Diese produziert eine Dehnung oder Stauchung Δl (oder relative Dehnung $\varepsilon = \Delta l/l$) der Materie;

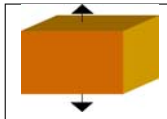
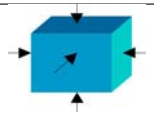
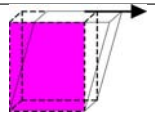
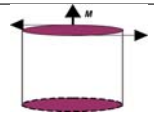
2. Ein dreidimensionaler Druck (allseitiger Druck), der eine Kompression ΔV (relative Kompression $\Delta V/V$) erzeugt;

3. Eine Scher- oder Schubkraft, die tangential zu einer Fläche der Materie wirkt und eine Scherung (Scherwinkel α) zur Folge hat; sowie

4. Die Torsion: eine Drillung der Materie um den Winkel φ_0 durch ein Drehmoment.

Diese Vorgänge sind charakterisiert durch Materialkonstanten, die miteinander zusammenhängen. Sie sind in der Tabelle 0.4 auf der folgenden Seite zusammengefasst.

Tabelle 0.4. Materialkonstanten

Dehnung	allseitiger Druck	Scherung	Torsion
			
Beobachtungen $F_n \sim \Delta l$	$\Delta V \sim \Delta P$	$\alpha \sim F_{tg}$	$\varphi_0 \sim M$
Verformung $\varepsilon = \Delta l/l$ (relative Dehnung)	$\Delta V/V$ (relative Kompression)	α (Scherwinkel)	φ_0 (Torsionswinkel)
Kraftgröße $\sigma = F_n/A$ (mech. Spannung)	$P = F_n/A$ (Druck)	$\tau = F_{tg}/A$ (Schubspannung)	$M = F_{tg}\, r$ (Torsionsmoment)
Gesetze $\sigma = E\,\varepsilon$ (E = Elastizitätsmodul)	$\Delta P = -K\Delta V/V$ (K = Kompressionsmodul; $\kappa = 1/K$ = Kompressibilität)	$\tau = G\alpha$ (G = Schubmodul)	$M = (\pi R^4/2\,l)\,G\,\varphi_0$
Querkontraktion $\varepsilon_Q = \Delta b/b = -\varepsilon\,\nu$ (ν = Poissonzahl)	Relationen zwischen Konstanten: K = E/3(1-2ν)	G = E/2(1+ν)	
makroskopische Beziehungen $Fel = -D\Delta l$, $D = AE/l$			$M_{tor} = -D^*\,\varphi_0$ $D^* = (A/l)(R^2/2)\cdot G$
elastische Energie $E_{el} = (VE/2)\varepsilon^2$ $[E_{el} = \left(\frac{D}{2}\right)\Delta l^2]$	Volumenarbeit $-P\Delta V$		$E_{el} = (D^*/2)\varphi_0^2$

Kräfte

Beispiele für Kräfte

fundamentale Kräfte

Kernbindungskraft - wirkt zwischen Nukleonen	sehr stark, sehr kurze Reichweite
Coulombkraft - wirkt zwischen elektrischen Ladungen	mittelstark, lange Reichweite
(magnetische Kraft) - wirkt zwischen *bewegten* Ladungen	(relativistische Korrektur zur Coulombkraft)
schwache Kraft - wirkt zwischen Nukleonen und Elektronen (β-Zerfall)	sehr schwach, sehr kurze Reichweite
Gravitationskraft - wirkt zwischen (Schwere-) Massen	extrem schwach, sehr lange Reichweite

makroskopische Kräfte

Kohäsionskraft	Zusammenhalt der Materie
Adhäsionskraft	»Zusammenkleben« verschiedener Materialien
elastische Kräfte	Widerstand fester Materie gegen Verformung
Reibungskräfte	Widerstand der Materie gegen Bewegung
Trägheitskräfte	Gegenkraft der (trägen) Masse gegen Beschleunigung
Zwangskräfte	Kräfte, die eine Bewegung einschränken

Symmetrien und Erhaltungssätze (für Kenner)

die Korrespondenz zwischen Erhaltungssätzen, Symmetrien, Invarianzen (universellen Symmetrien)

Erhaltung von ...	Symmetrie	Invarianz gegenüber ...
Energie	Homogenität der Zeit	Zeittranslation $t \rightarrow t + t_0$
Linearimpuls	Homogenität des Raumes	Raumtranslation $s \rightarrow s + s_0$
Drehimpuls	Isotropie des Raumes	Raumdrehung $\varphi \rightarrow \varphi + \varphi_0$
elektrische Ladung		Eichtransformation des elektrischen Potentials $\Phi \rightarrow \Phi + \Phi_0$
– (T)	Isotropie der Zeit	Zeitumkehr $t \rightarrow -t$
»Parität« (P)	»Chiralsymmetrie«	Rauminversion $x \rightarrow -x$
– (C)	Teilchen–Antiteilchen	»Ladungskonjugierung« $p \rightarrow \overline{p}$
–	CPT-Invarianz	Ladungskonjugation + Rauminversion + Zeitumkehr

Die Schwingungsbewegung

Nun kommen wir zur dritten einfachen Bewegungsart: zur **Schwingung**. Eine Schwingung zeigt einige Ähnlichkeiten mit der ebenen Kreisbewegung, z. B. sind beide **ortsgebunden**: die Kreisbewegung an den Kreismittelpunkt, die Schwingung an ihre sogenannte **Ruhelage**.

Es gibt jedoch einige wesentliche Unterschiede: die gleichförmige Kreisbewegung schreitet (auf der Kreisbahn) immer weiter fort, während sich die Schwingung zeitlich wiederholt. Die Kreisbewegung hat eine konstante **Zentripetalbeschleunigung**, bei der Schwingung treten aber während jedem Schwingungszyklus **unterschiedliche Beschleunigungen** (in Betrag und Richtung) auf. Die Kreisbewegung besitzt nur **kinetische (Rotations-) Energie**, die Schwingung aber sowohl **kinetische** als auch **potentielle Energie**.

Die Zeit, nach der sich eine Schwingung wiederholt, wird **Schwingungsdauer** T genannt. Der Kehrwert dieser Zeit gibt die *Anzahl der Schwingungen pro Zeiteinheit* an und heißt **Schwingungsfrequenz** $\boldsymbol{\nu}$; sie wird in 1/Sek. = Hertz gemessen. Man verwendet oft auch die Kreisfrequenz ω, mit $\omega = 2\pi\nu$ (auch in Hz gemessen). Die Kreisfrequenz deutet auf eine andere Ähnlichkeit der Schwingung und der Kreisbewegung hin: betrachtet man eine gleichförmige, ebene Kreisbewegung in der Kreisebene, d. h. projiziert auf eine Linie in der Ebene, so scheint sich der Massenpunkt auf und ab entlang dieser Linie zu bewegen. Die scheinbare Bewegung ist identisch mit einer harmonischen Schwingung, wobei die Kreisfrequenz der Schwingung gleich die Winkelgeschwindigkeit ω der Kreisbewegung ist (siehe Abbildung 0.11).

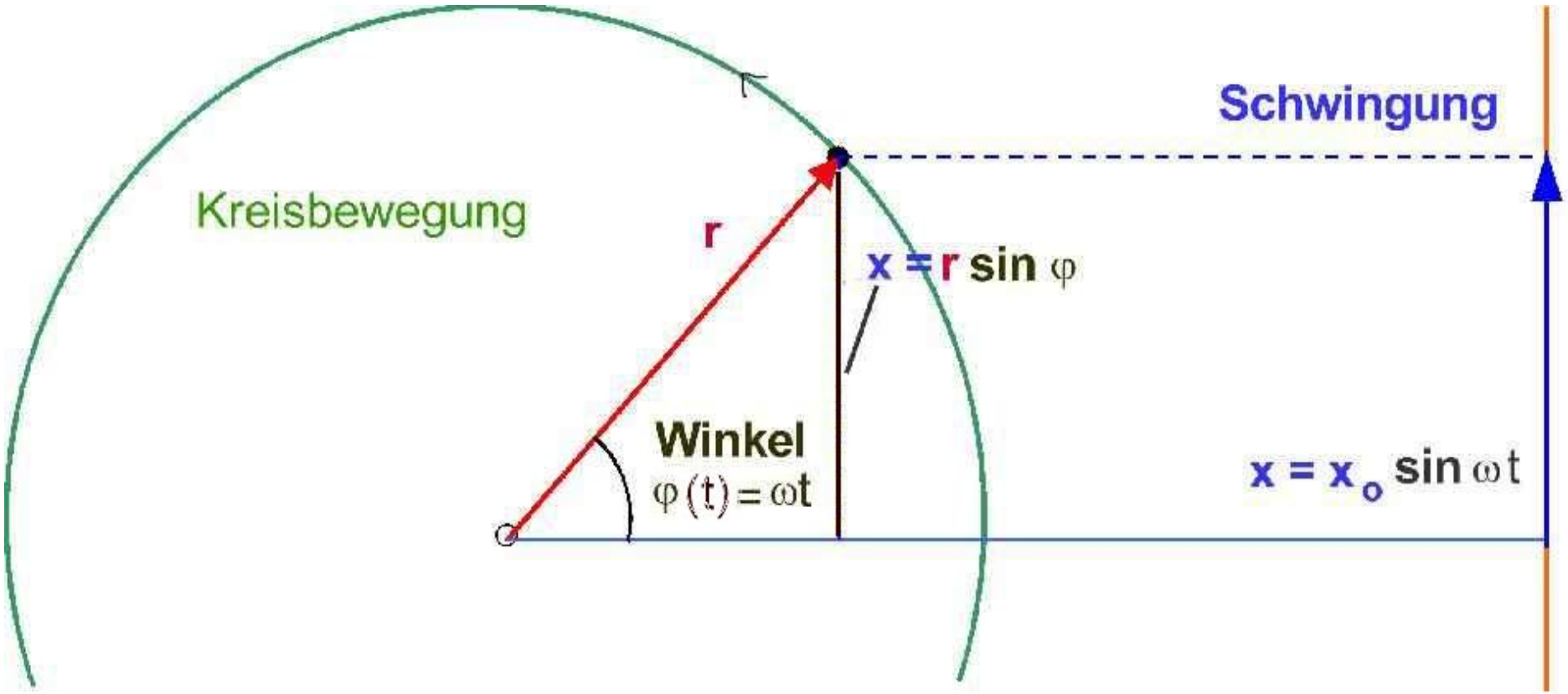


Abbildung 0.11.

Beschreibung der Schwingungsbewegung

Eine Schwingung entsteht, wenn zwei Bedingungen erfüllt sind:

- es muß eine rücktreibende Kraft (zur Ruhelage hin) wirken, und
- eine Trägheit muß vorhanden sein.

Die Beschreibung der Bewegung erhalten wir dann einfach dadurch, daß wir die rücktreibende Kraft als F in die Newton'sche Bewegungsgleichung $F = ma$ einsetzen. Alternativ dazu, können wir die Summe von potentieller Energie (welche mit der rücktreibenden Kraft zusammenhängt) und kinetischer Energie (die die Trägheit enthält) konstant setzen (Energiesatz!).

Beispiel: Federpendel Die rücktreibende Kraft ist die elastische Kraft,

$$\boldsymbol{F}_{\mathrm{E}} = -D\boldsymbol{x} \qquad \text{(Hooke'sches Gesetz!)}$$

wobei D die »Federkonstante« und x die Auslenkung (relativ zur Ruhelage) sind. Einsetzen in $\boldsymbol{F} = m\boldsymbol{a} = m\mathrm{d}^2\boldsymbol{x}/\mathrm{d}t^2$ und Umformen ergibt:

$$\left(\frac{D}{m}\right)\ \boldsymbol{x}(t) + \frac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{x}}{\mathrm{d}t^2} = 0$$

Diese Differentialgleichung (2. Ordnung) kann formell durch 2-maliges Integrieren gelöst werden; wir können sie aber einfach mit einer Versuchslösung

$$\boldsymbol{x}(t) = \boldsymbol{x}_0 \sin[\omega_0\, t + \varphi_0]$$

lösen (Die 2. Ableitung der Sinus- oder Kosinus-Funktion ist proportional der Funktion selbst!). Die Lösung enthält zwei Integrationskonstanten:($\boldsymbol{x}_0$ = Anfangsauslenkung oder Amplitude; φ_0= Anfangsphase). Außerdem enthält sie eine Systemkonstante, die **Kreisfrequenz** ω_0, die durch Eigenschaften des schwingenden Systems (des harmonischen Oszillators), nämlich die Kraftkonstante D sowie die Trägheitskonstante m, bestimmt wird. Dieselbe Schwingungsgleichung erhalten wir mit dem Energie-Ansatz ... weitere Beispiele: Drehschwingungen (Torsionspendel), Fadenpendel, Wassersäule in einem U-Rohr.

Die Gedämpfte Schwingung

Alle wirklichen Schwingungen halten nicht ewig an, wie die obige Lösung für $x(t)$ andeuten würde; die Schwingungsenergie geht durch Reibung verloren. Die Schwingungen sind dann »gedämpft« durch eine Reibungskraft:

$$\boldsymbol{F}_{\mathrm{R}} = -k\boldsymbol{v} = -k\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{x}}{\mathrm{d}t}$$

wo k die »Reibungskonstante« und v die momentane Geschwindigkeit der Schwingungsbewegung sind. (Andere Reibungskräfte, die nicht geschwindigkeitsproportional sind, sind auch bekannt, diese ist aber die wichtigste Form).
Die Lösung $\boldsymbol{x}(t)$ enthält wieder zwei Anfangsbedingungen, zeigt aber eine zusätzliche Zeitabhängigkeit :

$$\boldsymbol{x}(t) = \boldsymbol{x_0} e^{(-t/\tau)} \sin[\omega_1 t + \varphi_0]$$

mit der Dämpfungszeit $\tau = 2m/k$, und mit einer neuen Kreisfrequenz ω_1, gegeben durch:

$$\omega_1 = \sqrt{\omega_0^2 - \frac{k^2}{4\,m^2}}$$

Das heißt die Frequenz wird i. a. *kleiner*, die Amplitude sinkt exponentiell mit der Zeitkonstante τ:

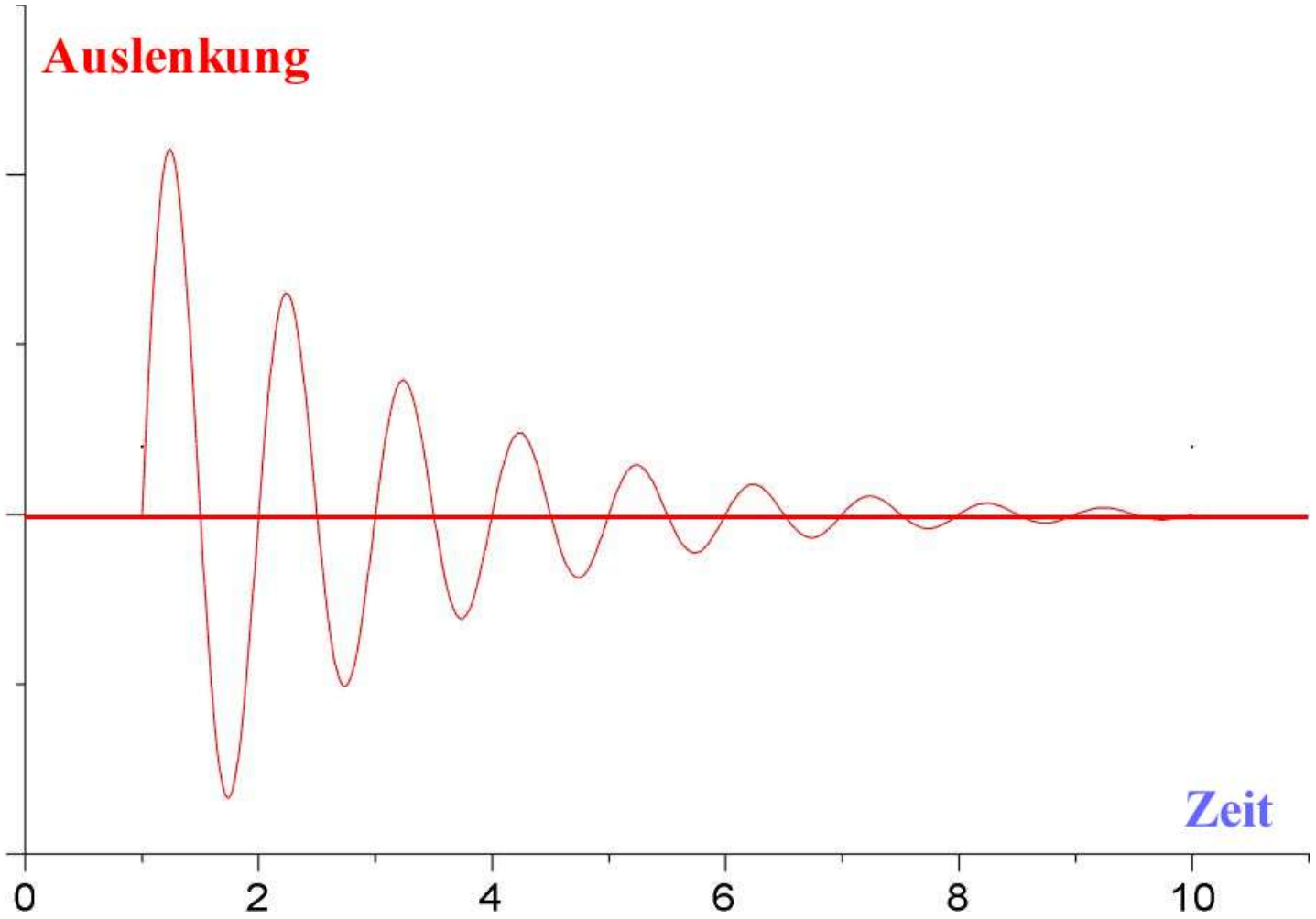


Abbildung 0.12. gedämpfte Schwingung

Wir können drei Fälle unterscheiden:

1. *Schwingfall*: es gilt $\omega_0^2 > k^2/4m^2$: der Oszillator schwingt, ist aber (wie oben) gedämpft.

2. *aperiodischer Grenzfall*: $\omega_0^2 = k^2/4m^2$: die Schwingung kommt nie zustande, die Dämpfung ist genauso schnell wie die Schwingung selbst. Nützlich für die Vermeidung von Schwingungen.

3. *Kriechfall*: $\omega_0^2 < k^2/4m^2$: der ausgelenkte Oszillator kehrt langsam, ohne zu schwingen, exponentiell zur Ruhelage zurück (»Kriechen«).

Erzwungene Schwingungen

Die bisher betrachteten Schwingungen sind *freie* Schwingungen, mit oder ohne Dämpfung – d. h., der Oszillator wird einmal »angestoßen« und läuft dann frei von zusätzlichen äußeren Kräften weiter. In der Natur sind alle Schwingungen mehr oder weniger stark gedämpft; ihre Schwingungsenergie wird durch Reibung o.ä. in Wärme umgewandelt, die Schwingung kommt allmählich zum Stillstand.

Ein wichtiger Fall ist dann die **erzwungene Schwingung**, wobei eine zyklisch wirkende externe Kraft die Schwingung trotz Dämpfung in Gang hält. Diese externe Kraft muß natürlich nicht stetig, sondern wiederkehrend wirken. Sie kann im Prinzip eine beliebige Form haben (z. B. das Stoßen einer Schaukel), jedoch ist der wichtigste Fall eine harmonische externe Kraft, d. h. eine Kraft der Sinus- oder Kosinusform:

$$\boldsymbol{F}_{\text{ext}} = \boldsymbol{F}_0 \cos(\omega_{\text{ext}} t)$$

wobei $\boldsymbol{F}_0$ die Stärke (Amplitude) der externen Kraft und ω_{ext} ihre Kreisfrequenz sind. Beide sind frei wählbar, unabhängig von dem Oszillator, worauf die Kraft wirkt. Die Schwingungsgleichung hat nun eine andere Form: die Summe von rücktreibender Kraft, Trägheitskraft, und Reibungskraft ist nicht mehr Null, sondern gleich der externen Kraft:

$$\left(\frac{D}{m}\right)\boldsymbol{x}(t) + \left(\frac{k}{m}\right)\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{x}}{\mathrm{d}t} + \frac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{x}}{\mathrm{d}t^2} = \left(\frac{\boldsymbol{F}_0}{m}\right)\cos(\omega_{\text{ext}} t)$$

Die Lösung dieser Schwingungsgleichung ist komplizierter als bei der freien Schwingung. Sie besteht aus zwei Teilen:

1. *dem Einschwingen*: der Oszillator versucht, mit seiner Eigenfrequenz ω_0 zu schwingen; dies klingt mit der Dämpfungszeit τ ab ...

2. *dem stationären Zustand*: der Oszillator schwingt mit der von außen geprägten Frequenz ω_{ext}, die Amplitude und Phase der Schwingungen hängen von dem Verhältnis $\omega_0/\omega_{\text{ext}}$ sowie von der Dämpfung ab.

   Lösung: $y = y_0 \sin(\omega t - \beta)$

   mit: $y_0 = \frac{F_0}{m\sqrt{(\omega_0^2 - \omega_{ext}^2)^2 + 4\delta^2\omega_{ext}^2}}$

   Dämpfungskonstante $\delta = \frac{k}{2m}$; $\omega_0 = \sqrt{\frac{D}{m}}$

   β: Phasenverschiebung zwischen Erreger-Kraft F(t) und erzwungener Schwingung, es gilt:

   $\tan\beta = \frac{2\delta\omega_{ext}}{\omega_0^2 - \omega_{ext}^2}$

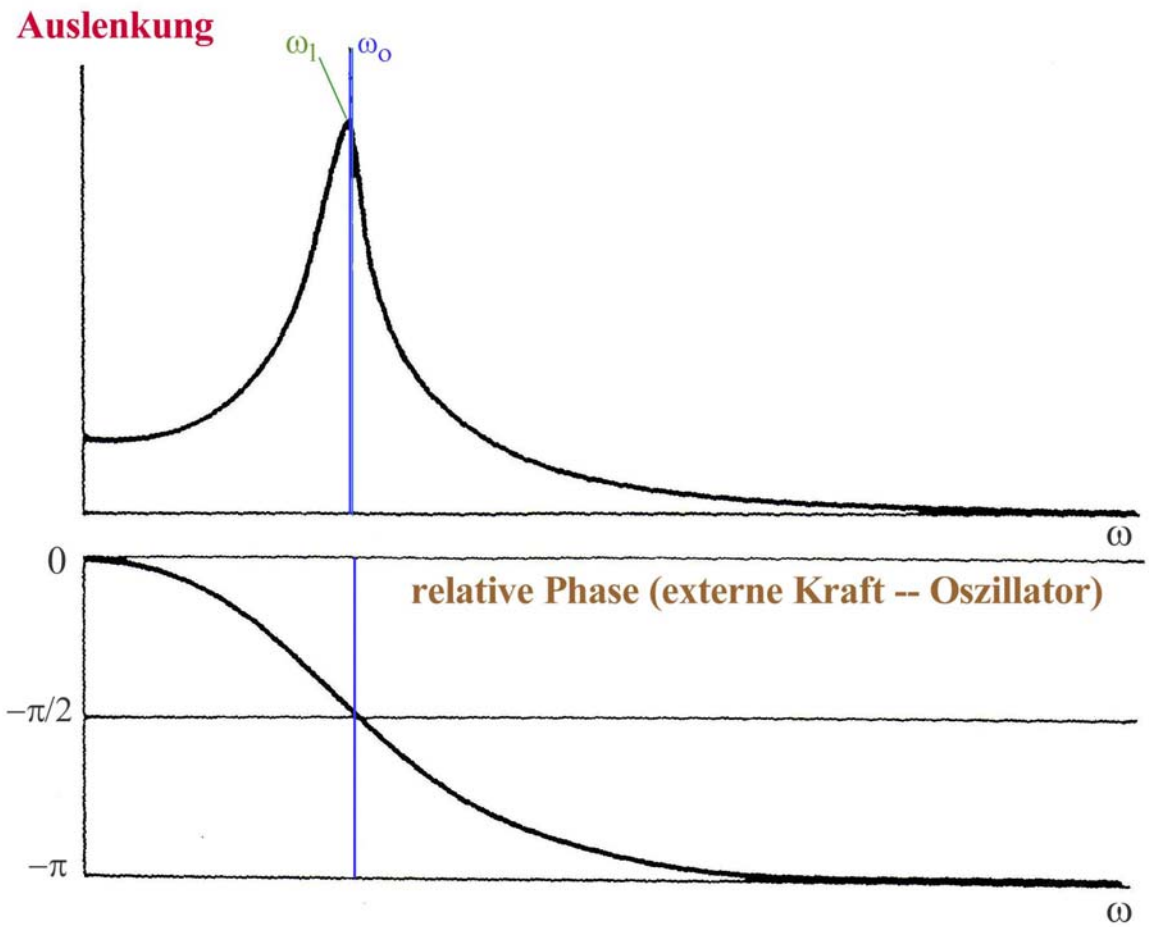


Abbildung 0.13. Die Auslenkung (Amplitude) und die relative Phase eines erzwungenen Oszillators im stationären Zustand als Funktion der externen Frequenz. Bei niedrigen Frequenzen »geht der Oszillator mit«, seine Auslenkung ist genauso groß, wie die Amplitude der externen Kraftquelle. Wenn die externe Frequenz gleich die Eigenfrequenz des Oszillators ist ($\omega_0/\omega_{\text{ext}} = 1$), ist die Leistungsübertragung optimal, es gibt eine »Resonanzüberhöhung« der Auslenkung. Die maximale Auslenkung findet man jedoch bei der gedämpften Frequenz, $\omega_{\text{ext}} = \omega_1$. Steigt die externe Frequenz noch weiter, so nimmt die Auslenkung wieder ab und geht gegen Null für hohe Frequenzen. Die relative Phase zwischen externer Kraftquelle und Oszillator ist Null für kleine Frequenzen, 90 ° bei Resonanz, und geht gegen 180 ° für große externe Frequenzen.

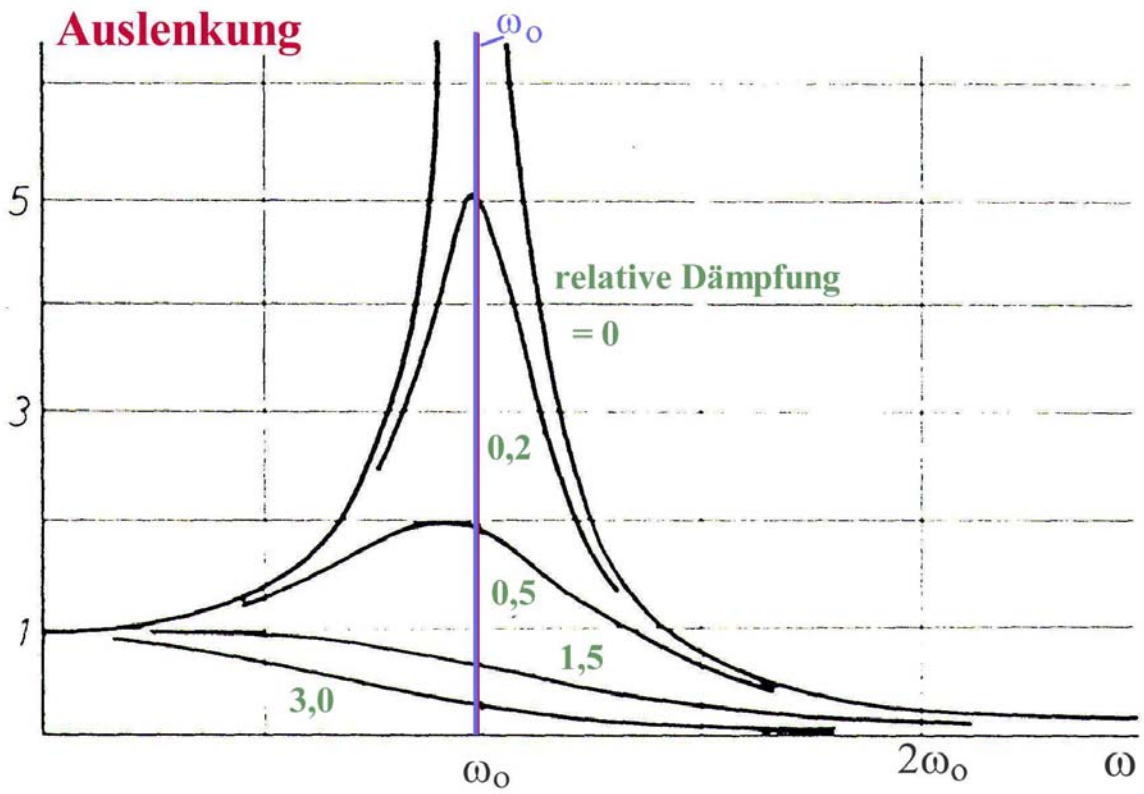


Abbildung 0.14. Die Auslenkung eines erzwungenen Oszillators der Eigenfrequenz ω_0 in Abhängigkeit der externen Frequenz ω für verschiedene relative Dämpfungsfaktoren $k/\sqrt{m\,D}$. Bei kleiner Dämpfung wächst die Auslenkung im Resonanzfall gegen Unendlich (Resonanzkatastrophe!). Bei großer Dämpfung gibt es keine Resonanzüberhöhung der Auslenkung mehr. Die Breite der Resonanzkurve wird geringer, wenn die Dämpfung kleiner wird.

Tabelle 0.5. Vergleich von verschiedenen Oszillatoren (schwingungsfähigen Systemen)

Größe, Eigenschaft	Federpendel	Drehpendel	Fadenpendel (Länge l)
Auslenkung	Strecke $x(t)$	Winkel $\varphi(t)$	Winkel $\varphi(t)$ oder Bahnstrecke $s_\mathrm{B}(t)$
rücktreibende Kraft	elastische (Feder-)Kraft $F = -Dx$	elastisches (Torsions-) Moment $M = -D^*\varphi$	Schwerkraft $F = -m\,g\sin\varphi$ (nicht harmonisch!)
Trägheit	Masse m	Trägheitsmoment Θ	Masse m
Dämpfung	Reibungskraft $F = -kv$	Torsionsreibung $M = -k^*\varphi$	Reibungskraft $F = -kv$
Lösung der Bewegungsgleichung	$x(t) =$ $x_0\,\sin[\omega_0\,t + \varphi_0]$	$\varphi(t) =$ $\varphi_0\,\sin[\omega_0\,t + \xi_0]$	$s_\mathrm{B}(t) =$ $s_0\,\sin[\omega_0\,t + \xi_0]$ *oder* $\varphi(t) =$ $\varphi_0\,\sin[\omega_0\,t + \xi_0]$ (mit $\sin\varphi \approx \varphi$)
Kreisfrequenz ω_0 (Eigenfrequenz)	$\omega_0 = \sqrt{\frac{D}{m}}$	$\omega_0 = \sqrt{\frac{D^*}{\Theta}}$	$\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{l}}$
gedämpfte Frequenz ω_1	$\omega_1 =$ $\sqrt{\omega_0^2 - \frac{k^2}{4\,m^2}}$	$\omega_1 =$ $\sqrt{\omega_0^2 - \frac{k^{*2}}{4\,\Theta^2}}$	$\omega_1 =$ $\sqrt{\omega_0^2 - \frac{k^2}{4\,m^2}}$

Wellenlehre

gekoppelte Schwingungen

Werden zwei (oder mehr) harmonische Oszillatoren aneinander gekoppelt[1], dann führen sie eine komplexe Bewegung aus. Diese gekoppelten Schwingungen haben jedoch eine einfache Form, wenn die richtigen Anfangsbedingungen gewählt werden:

- wenn am Anfang die gesamte Schwingungesnergie in *einem* Oszillator gespeichert wird, entstehen sog. »Schwebungen«: die Schwingungsenergie wechselt zeitlich zwischen den einzelnen Oszillatoren hin und her;

- wenn alle Oszillatoren am Anfang mit einer festen Phasenbeziehung angeregt werden, entstehen *Normalschwingungen*. Dabei bewegen sich alle Oszillatoren synchron, mit der gleichen Frequenz; die niedrigste Frequenz entspricht der Grundschwingung, wobei sich alle Oszillatoren zusammen bewegen. Es gibt soviele Normalschwingungen wie einzelne Oszillatoren im gesamten, gekoppelten System (»Anzahl der Freiheitsgrade«). Können Schwingungen in allen drei Raumrichtungen stattfinden so gibt es 3N-6 Normalschwingungen (bzw. 3N-5 für lineare Systeme).

Es gibt viele Beispiele für gekoppelte Schwingungen in der Natur. Relativ einfach sind die Schwingungen kleiner Moleküle (CO_2, NH_3 usw.), die mit der Infrarot- und Raman-Spektroskopie auch gemessen werden können. Auch alle Wellen können als gekoppelte Schwingungen angesehen werden, wobei sich die Schwingungsenergie durch eine Kette von aneinandergekoppelten Oszillatoren (das Medium der Wellenausbreitung) fortpflanzt (siehe Abb. 0.16 auf Seite 93). Beispiele: gekoppelte Federpendel, gekoppelte Fadenpendel; Dreh- und lineare Schwingungen eines Federpendels.

[1] z. B. Federpendel durch eine » Kopplungsfeder«

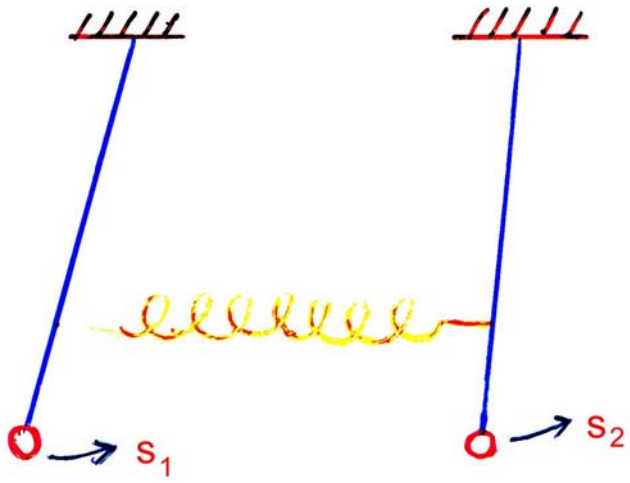


Abbildung 0.15. Zwei mit einer Feder gekoppelte Fadenpendel

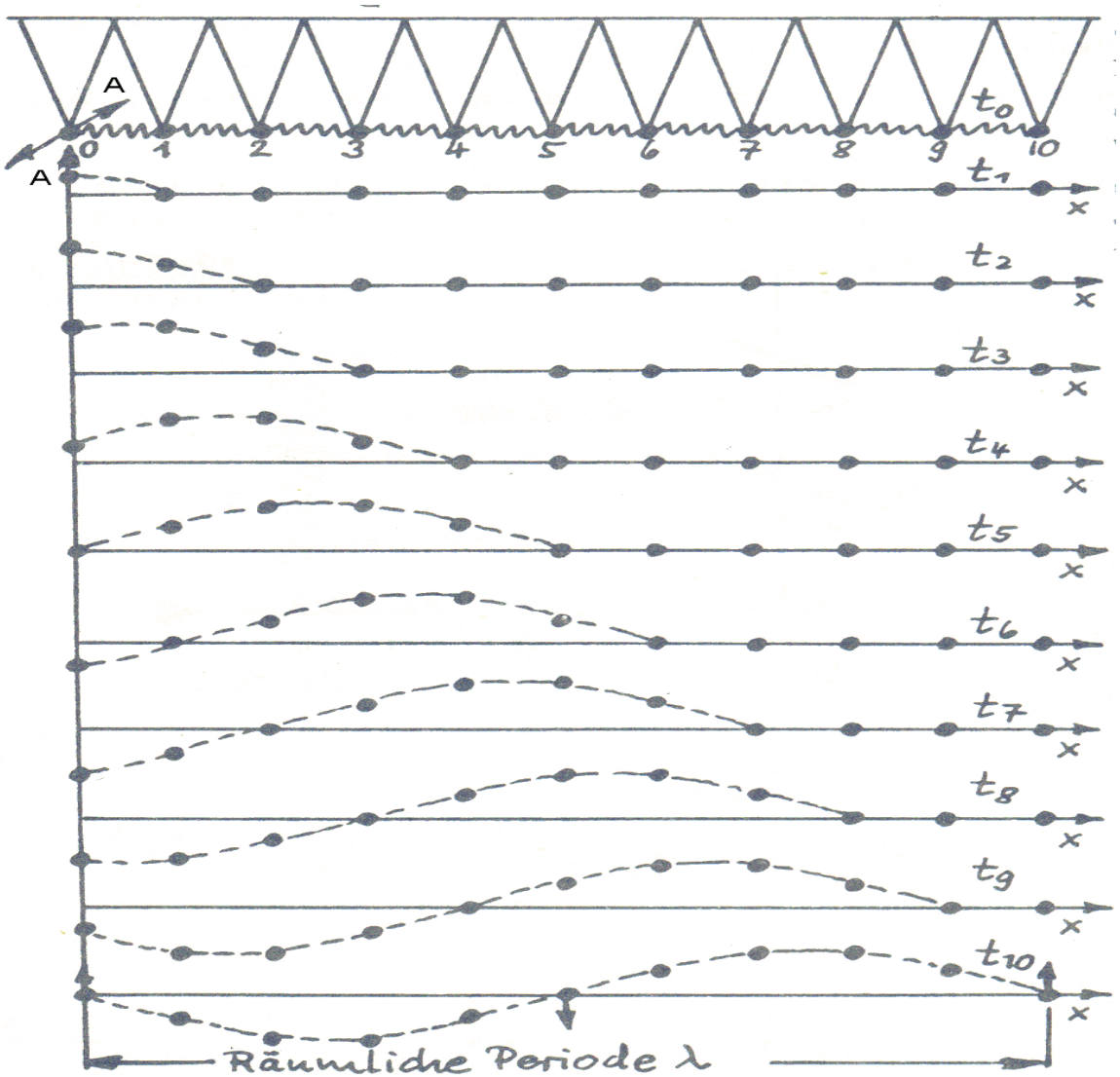


Abbildung 0.16. Mechanische Wellen

Bei einer Reihe gleicher Fadenpendel werden die Pendelkugeln miteinander durch Federn gekoppelt. Diese Pendelkugeln können wir als Atome oder Moleküle ansehen, die Federn verkörpern die Kräfte zwischen den atomaren Teilchen. Die Pendelreihe sei in x-Richtung ausgerichtet und dazu senkrecht wird das Anfangspendel 0 mit der Amplitude A ausgelenkt. Jedes Pendel kann Schwingungen um seine Ruhelage ausführen.

In Folge der elastischen Federkopplungen pflanzt sich dann diese Schwingung nacheinander auf die anderen Pendel fort.
Nacheinander erreicht ein bestimmter Schwingungszustand, z.B. der Zustand, bei dem die Auslenkung A in positiver Richtung maximal wird, alle Pendel. Der Schwingungszustand oder die Schwingungsphase pflanzt sich mit endlicher Geschwindigkeit c, der sogenannten Phasengeschwindigkeit längs der Pendelreihe fort.

Jedes einzelne Pendel vollführt eine periodische Schwingungsbewegung in der Zeit um seine Ruhelage. Zum Zeitpunkt t_{10} hat das Pendel 10 den gleichen Bewegungszustand, d.h. die gleiche Schwingungsphase wie das Pendel 0.

Der Bewegungszustand ist also auch **periodisch im Raum**. Einen solchen zeitlich und räumlich periodischen Vorgang nennt man eine **fortschreitende Welle**.

Den räumlichen Abstand zweier Punkte, die sich im gleichen Schwingungszustand befinden nennt man **räumliche Periode der Welle oder Wellenlänge** λ.

Die Zeit die benötigt wird, um den Schwingungszustand über eine Wellenlänge zu transportieren heisst **Schwingungsdauer T**.

Damit gilt für die Phasengeschwindigkeit $c = u_\varphi = \frac{\lambda}{T} = \lambda\nu$, wobei ν der Kehrwert der Schwingungsdauer T ist.

Wellen, allgemeine Beschreibung

Wellen sind gewissermaßen »Schwingungen, die sich auf den Weg gemacht haben«. Eine Schwingung ist ortsgebunden, zeigt aber eine zyklische Änderung (Bewegung) in der Zeit. Wellen sind nicht nur in der Zeit, sondern auch im Ort zyklisch; sie erstrecken sich über einen größeren Ortsbereich bzw. breiten sich im Ortsbereich aus.
Wie auch bei den Schwingungen haben Wellen eine besonders einfache Form, wenn sie *harmonisch* sind, d. h. durch eine Sinus- oder Kosinusfunktion beschrieben werden können. Das Argument der Funktion enthält dann nicht nur die **Zeitabhängigkeit**, wie bei Schwingungen, sondern auch die **Ortsabhängigkeit** der Wellen.
Wellen haben ebenso wie Schwingungen eine **Amplitude** A_0 und eine **Phase** φ_0, welche durch die Anfangsbedingungen gegeben sind. Außerdem sind sie charakterisiert durch eine Systemkonstante, die ihre Zeitabhängigkeit angibt (Schwingungsdauer T bzw. Frequenz $\nu = 1/T$ oder **Kreisfrequenz** $\omega = 2\,\pi\,\nu$). Wellen sind außerdem gekennzeichnet durch eine *zweite* Systemkonstante, die ihre Ortsabhängigkeit beschreibt –ihre Wellenlänge λ bzw. **Wellenzahl** $\vec{k} = 2\,\pi/\lambda$:

$$\Psi(x,t) = A_0 \sin[\omega\,t - \vec{k} \bullet \vec{x} + \varphi_0]$$

$\Psi(x,t)$ wird Wellenfunktion genannt; sie beschreibt die Auslenkung der Welle als Funktion von Ort x und Zeit t. Diese Form gilt für eindimensionale, laufende Wellen, die sich in $+x$-Richtung ausbreiten.

Zwischen den Systemkonstanten (die vom Medium bestimmt sind, in dem sich die Wellen ausbreiten) gibt es eine weitere Beziehung, die die Ausbreitungsgeschwindigkeit (Phasengeschwindigkeit) c oder u_φ der Wellen angibt:

$$u_\varphi = c = \lambda\,\nu = \frac{\omega}{k} \qquad \text{(Grundgleichung der Wellenlehre)}$$

Wellentypen

Wir unterscheiden verschiedene *Typen von Wellen*, je nachdem, wie die schwingende Größe zu der Ausbreitungsrichtung steht und wie sie sich ausbreiten:

- falls die schwingende Größe senkrecht zur Ausbreitung steht, sind es *transversale Wellen* (Wasserwellen, Lichtwellen)
- steht sie parallel dazu, sind es *longitudinale* Wellen (Schallwellen)
- Wellen, die sich in eine (oder mehrere) Richtung(en) ausbreiten und Energie transportieren, heißen *laufende* Wellen (Licht, Schall,...)
- Wellen, die in einem fest abgegrenzten System schwingen und keine Energie transportieren, heißen *stehende* Wellen (akustische Wellen auf einer Geigensaite oder in einer Orgelpfeife)
- Wellen, bei denen die Amplitude überall gleich ist (senkrecht zur Ausbreitungsrichtung), heißen *ebene* Wellen; sie können durch Ebenen senkrecht zur Ausbreitung dargestellt werden
- Wellen, bei denen die Bereiche konstanter Amplitude auf Kugelflächen liegen, heißen *Kugel*wellen (z. B. Lichtwellen von einer Punktquelle)

Transversale Wellen können auch *polarisiert* sein: das heißt, ihre schwingende Größe schwingt in nur einer Ebene (anstatt in allen möglichen Richtungen) senkrecht zur Ausbreitung (bei Licht: *Linearpolarisation*).

Als Beispiel, um die Wellenausbreitung in einem Medium zu untersuchen, betrachten wir *transversale, laufende, eindimensionale* Wellen auf einem elastischen Seil (Gummiseil, siehe Abb. 0.17 auf der folgenden

Seite). Wir bezeichnen die Seilrichtung als x, die Auslenkungsrichtung des Seils (senkrecht zu x) als z. Wir wollen dann das Verhalten der Wellenfunktion $\Psi(x,t) \equiv z(x,t)$ berechnen.

Dazu teilen wir das Seil in beliebig viele sehr kleine Schnitte der Länge $\mathrm{d}x$, die je eine Masse $\mathrm{d}m = \rho_l \mathrm{d}x$ haben (ρ_l = Masse pro Längeneinheit oder lineare Massendichte). Jeder Schnitt verhält sich wie ein harmonischer Oszillator. Nun berechnen wir die rücktreibende Kraft auf jedem Schnitt und setzen sie in die Newton'sche Bewegungsgleichung $F = ma$ ein. Die rücktreibende Kraft hängt von der Zugkraft Z ab, mit der das Seil gestreckt wird, aber auch von der Krümmung des Seils am jeweiligen Punkt. Ist die

Abbildung 0.17. Die Welle am Beispiel der Seilwelle

Krümmung Null (gerades Seil), so verschwindet die rücktreibende Kraft. Die Krümmung wird durch die 2. Ableitung der Seilkurve z(x) gegeben:

$$\text{Krümmung} \equiv \frac{\mathrm{d}^2 z}{\mathrm{d}x^2} = \frac{\partial^2 \Psi(x,t)}{\partial x^2}$$

und damit ist die rücktreibende Kraft $\boldsymbol{F}_{\text{rü}}$ gegeben als:

$$\boldsymbol{F}_{\text{rü}} = Z \, \frac{\partial^2 \Psi(x,t)}{\partial x^2} \, \mathrm{d}x$$

Die *Beschleunigung* während der Wellenbewegung ist die 2. zeitliche Ableitung der Auslenkung $z(t)$, d. h.

$$a = \frac{\mathrm{d}^2 z}{\mathrm{d}t^2} \equiv \frac{\partial^2 \Psi(x,t)}{\partial t^2}$$

Einsetzen in die Bewegungsgleichung, mit $m = \rho_l \, \mathrm{d}x$, ergibt:

$$Z \, \frac{\partial^2 \Psi(x,t)}{\partial x^2} \, \mathrm{d}x = \rho_l \, \frac{\partial^2 \Psi(x,t)}{\partial t^2} \, \mathrm{d}x$$

oder, nach Kürzen des Faktors $\mathrm{d}x$ auf beiden Seiten der Gleichung,

$$Z \, \frac{\partial^2 \Psi(x,t)}{\partial x^2} = \rho_l \, \frac{\partial^2 \Psi(x,t)}{\partial t^2}$$

Dies nennt sich die **klassische Wellengleichung**; ihre Lösung ist die Wellenfunktion $\Psi(x,t)$. Die Konstanten Z und ρ_l (Systemkonstanten) bestimmen die Ausbreitungsgeschwindigkeit u_φ:

$$u_\varphi^2 = \frac{Z}{\rho_l} \, .$$

Anwendungen der Wellengleichung

Die Bewegungsgleichung der Welle ist durch folgende Differentialgleichung 2. Ordnung gegeben (2-fache Ableitungen):

$$u_\varphi^2 \frac{\partial^2 \Psi(x,t)}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \Psi(x,t)}{\partial t^2}$$

Diese Gleichung beschreibt die Bewegung von laufenden Wellen. Wir wollen zunächst zeigen, daß eine harmonische Welle, die in $+x$-Richtung läuft, tatsächlich eine Lösung der Wellengleichung ist. Wir nehmen die Versuchslösung

$$\Psi(x,t) = A_0 \sin[\omega\, t - kx + \varphi_0]$$

und setzen sie in die Wellengleichung ein. Dazu brauchen wir die Ableitungen bzgl. Ort x und Zeit t:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \Psi(x,t)}{\partial x} &= -k\, A_0\, \cos[\omega\, t - kx + \varphi_0] \\
\frac{\partial^2 \Psi(x,t)}{\partial x^2} &= -k^2\, A_0\, \sin[\omega\, t - kx + \varphi_0] \\
\frac{\partial \Psi(x,t)}{\partial t} &= \omega\, A_0\, \cos[\omega\, t - kx + \varphi_0] \\
\frac{\partial^2 \Psi(x,t)}{\partial t^2} &= -\omega^2\, A_0\, \sin[\omega\, t - kx + \varphi_0]
\end{aligned}$$

Einsetzen in die Wellengleichung ergibt:

$$-k^2\, u_\varphi^2\, A_0 \sin[\omega\, t - kx + \varphi_0] = -\omega^2\, A_0 \sin[\omega\, t - kx + \varphi_0]$$

oder, nach Kürzen der Sinusfunktionen und Amplituden auf beiden Seiten,

$$k^2 = \frac{\omega^2}{u_\varphi^2} \qquad \text{oder} \qquad \frac{\omega^2}{k^2} = u_\varphi^2$$

Dieses Ergebnis entspricht aber genau der Grundgleichung der Wellenlehre:

$$u_\varphi = c = \lambda\,\nu = \frac{\omega}{k} \qquad \text{(Grundgleichung der Wellenlehre)}$$

und erfüllt somit die Wellengleichung:

$$-k^2\,u_\varphi^2\,A_0 \sin[\omega\,t - kx + \varphi_0] = -\omega^2\,A_0 \sin[\omega\,t - kx + \varphi_0]$$

Diese Gleichung enthält nur *eine* (allgemeine) Systemkonstante, die (Phasen-) Geschwindigkeit u_φ. Sie gilt für *jedes* Wellenmedium.
Wir sehen, daß für jede Art von Wellen – Wasserwellen, Seilwellen, akustische (Schall-) Wellen, elektrische Wellen, auch elektromagnetische Wellen (Radio-, Radar-, Infrarotlicht-, sichtbares Licht-, UV-Licht-, Röntgen- und schließlich Gammastrahlungs-Wellen) – dieselbe Gleichung gilt, wobei die einzige auftretende Konstante (durch das Ausbreitungsmedium bestimmt) die Ausbreitungsgeschwindigkeit u_φ ist.
Diese Geschwindigkeit u_φ hängt wiederum von zwei Systemkonstanten ab, die man (verallgemeinert) die »Konstante der Rückstellkraft« K und die »Konstante der Trägheit« T nennen könnte. Bei Seilwellen sind sie eben die Zugkraft am Seil und seine lineare Massendichte. Einige weitere Beispiele sind in der Tabelle 0.6 auf der nächsten Seite aufgeführt.
In jedem Fall ist die Ausbreitungsgeschwindigkeit der Wellen u_φ gegeben durch:

$$u_\varphi = \sqrt{\frac{K}{T}}$$

Tabelle 0.6.

System	»Rückstellkraft« K	»Trägheit« T
elastisches Seil	Zugkraft Z	lineare Massendichte ρ_l
Wasserwellen	Oberflächenspannung σ bzw. Schwerkraft mg	Volumen-Massendichte ρ
Schallwellen	Luftdruck $P\kappa$	Volumen-Massendichte ρ
elektrische Wellen auf einem Kabel	elektr. Kapazität/Länge, $\frac{1}{l\,C_0}$	Induktivität/Länge, $\frac{L_0}{l}$
elektromagnetische Wellen im Vakuum	elektr. Feldkonstante des Vakuums, $\frac{1}{\varepsilon_0}$	magn. Feldkonstante des Vakuums, μ_0
elektromagnetische Wellen in einem Medium	elektr. Feldkonstante des Mediums, $\frac{1}{\varepsilon_r\,\varepsilon_0}$	magn. Feldkonstante des Mediums, $\mu_r\,\mu_0$

(vgl. $\omega_0 = \sqrt{D/m}$ bei Schwingungen!). Die Wellengleichung, wie wir sie aufgeschrieben haben, ist analog zur Schwingungsgleichung ohne Dämpfung oder externe Kraft. Sie sagt nichts über den Ursprung der Wellen oder ihrer evtl. Dämpfung aus! (Beispiele: stehende Wellen auf Saite, Wasserwellen).

Interferenz von Wellen, stehende Wellen

Finden mehrere Wellenbewegungen im selben Medium statt, so können diese durch Superposition, d.h. Überlagerung bzw. Addition der einzelnen Wellenbewegungen dargestellt werden.

Da die Wellenbewegung positive und negative Amplituden aufweist, kann diese Addition von einzelnen Wellenbewegungen zur Verstärkung oder auch Auslöschung der Bewegung oder der Schwingung führen. Diese Phänomene bezeichnet man als Interferenzerscheinung.

Einfache Lösungen der Wellengleichung, die durch Interferenz hervorgerufen werden sind stehende Wellen. Diese werden hervorgerufen, wenn zwei identische Wellen in entgegengesetzter Richtung aufeinander zulaufen und zur Überlagerung kommen:

$$
\begin{aligned}
\Psi_1(x,t) &= A_0 \sin(\omega t - kx) \\
\Psi_2(x,t) &= A_0 \sin(\omega t + kx + \varphi_0) \\
mit \quad \sin\alpha + \sin\beta &= 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2} \\
\Psi_1(x,t) + \Psi_2(x,t) &= 2A_0 \sin\left(\frac{\omega t - kx + \omega t + kx + \varphi_0}{2}\right)\cos\left(\frac{\omega t - kx - \omega t - kx - \varphi_0}{2}\right) \\
\Psi_1(x,t) + \Psi_2(x,t) &= 2A_0 \sin\left(\omega t + \frac{\varphi}{2}\right)\cos\left(-kx - \frac{\varphi}{2}\right)
\end{aligned}
$$

Dies ist keine fortschreitende Welle mehr, da der charakteristische Term mit $(\omega t - kx)$ in der Sinus- und Kosinusfunktion fehlt. Unabhängig vom Ort schwingen nun alle Teilchen in gleicher Phase (Sinusterm) und nur ihre Amplitude ist Ortsabhängig (Kosinusterm). Die Schwingungsknoten (Amplitude Null) und die Schwingungsbäuche (Amplitude maximal) sind ortsfest. Es berechnen sich die Positionen der Knoten und Bäuche für $\varphi = \pi$ und natürlichen Zahlen n aus:

$$\begin{aligned} x_K &= n\frac{\lambda}{2} \\ x_B &= (n + \frac{1}{2})\frac{\lambda}{2} \end{aligned}$$

Diese kann man gut auf einer schwingenden Saite oder an einem schwingenden Seil sehen.

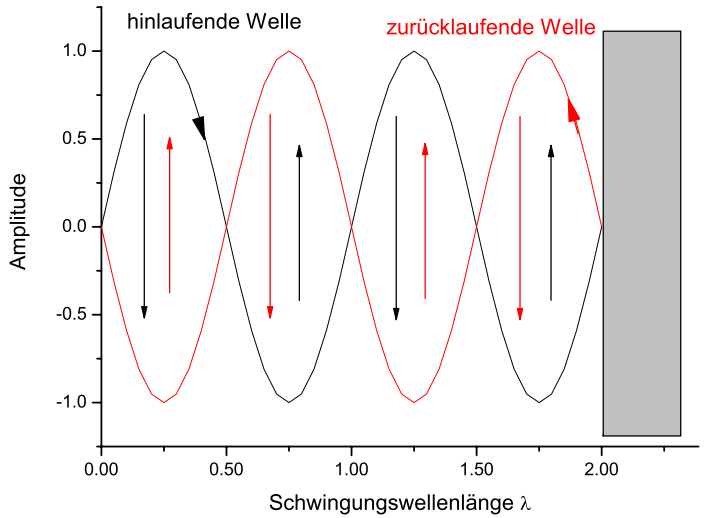


Abbildung 0.18. Interferenzerscheindung der stehenden Welle

Wird eine stehende Welle in einem einseitig geschlossenen Rohr erzeugt (z.B. Panflöte), so befindet sich ein Wellenknoten am geschlossenen Ende (Phasensprung von π) und ein Wellenbauch am offenen Ende (kein Phasensprung). Die Wellenlänge der Grundschwingung des Rohres (n=1) ergeben sich aus $l = (2n-1)\frac{\lambda}{4} = \frac{c}{4\nu} =$, wobei l die Rohrlänge ist.

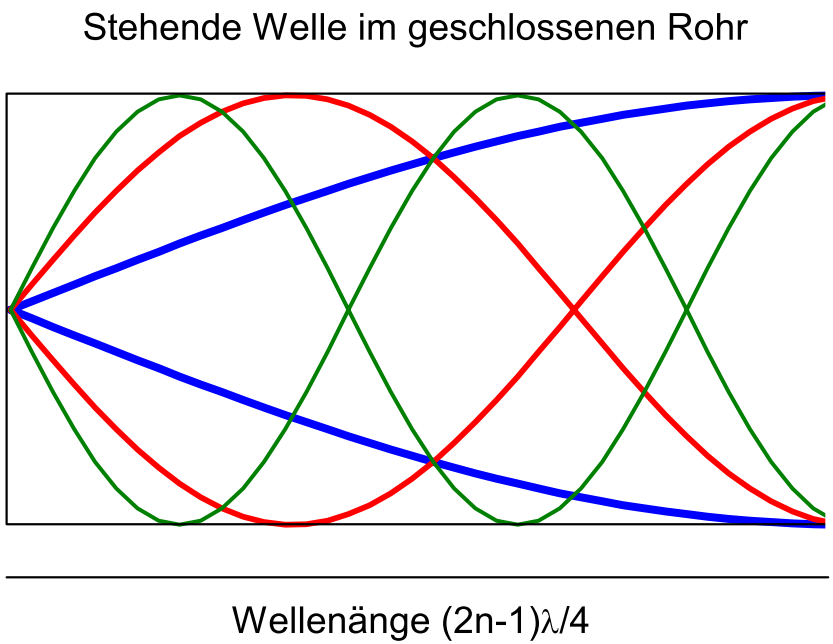


Abbildung 0.19. Stehenden Welle im einseitig geschlossenen Rohr

Wird eine stehende Welle in einem beidseitig offenen Rohr erzeugt, so befinden sich an beiden Seiten des Rohres Wellenbäuche. Die Wellenlängen der Schwingungen des Rohres der Länge l ergeben sich zu $\lambda = \frac{2l}{n} = \frac{c}{\nu}$

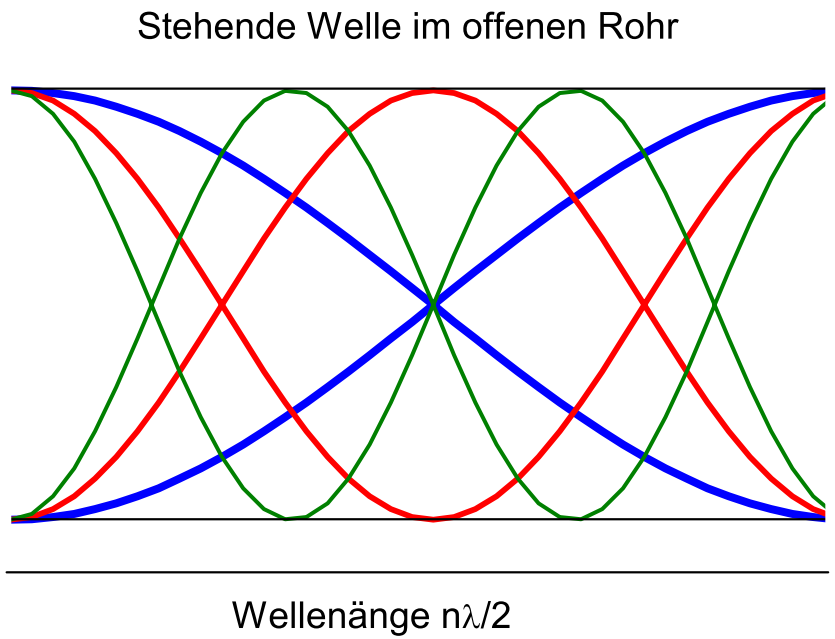


Abbildung 0.20. Stehenden Welle im offenen Rohr

Wellengruppen, Wellenpakete

Die Geschwindigkeit, mit der sich die Gesamtphase $[\omega\, t - kz + \varphi_0]$ einer Welle ändert (durch Ableiten der Gesamtphase nach t zu erhalten) heißt *Phasengeschwindigkeit* u_φ, mit $u_\varphi = \omega/k$ bzw. $u_\varphi = \lambda\nu$. Dies ist die Ausbreitungsgeschwindigkeit eines (unendlichen) *Wellenzuges* der Form

$$\Psi(z,t) = A_0 \cos[\omega t - kz + \varphi_0]\,.$$

In der Natur kommen solche Wellenzüge kaum vor; stattdessen haben wir zeitlich und örtlich mehr oder weniger begrenzte Wellen*gruppen* oder Wellenpakete. Eine Wellengruppe entsteht durch Überlagerung von zwei oder mehr Wellenzügen *gleicher Phase und Richtung* aber *unterschiedlicher Frequenz und Wellenlänge*. Als Beispiel nehmen wir zwei Kosinuswellen:

$$\Psi_{\mathrm{WP}}(z,t) = A_0 \cos[\omega_1 t - k_1 z] + A_0\, \cos[\omega_2 t - k_2 z]$$

durch Verwendung des Additionssatzes für Kosinusfunktionen erhalten wir:

$$\Psi_{\mathrm{WP}}(z,t) = \Big\{2A_0 \cos[\Delta\omega t - \Delta k z]\Big\} \cos[<\omega>\ t - <k>\ z]$$

Dies hat die Form einer »{Gruppenamplitude}« × »[mittlere Wellenfunktion]« mit

$$\Delta\omega = \frac{(\omega_1 - \omega_2)}{2}\,, \qquad \Delta k = \frac{(k_1 - k_2)}{2}$$

und

$$<\omega> = \frac{(\omega_1 + \omega_2)}{2}\,, \qquad <k> = \frac{(k_1 + k_2)}{2}\,.$$

Die Geschwindigkeit der Wellengruppe, genannt Gruppengeschwindigkeit u_{G}, erhalten wir durch Ableiten des Arguments der Gruppenamplitude nach t, wobei wir die Gesamtphase festhalten:

$$[\Delta\omega\, t - \Delta k\, z] = \text{konst.}, \qquad \frac{\mathrm{d}[\Delta\omega\, t - \Delta k\, z]}{\mathrm{d}t} = \Delta\omega - \frac{\Delta k \mathrm{d}z}{\mathrm{d}t} = 0$$

woraus

$$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t} = u_G = \frac{\Delta\omega}{\Delta k}\,,$$

d. h.

$$u_G = \frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}k}\,.$$

Die Beziehung zwischen ω und k, d.h. $\omega(k)$, wird *Dispersionsrelation* genannt: $\omega = u_\varphi\, k$. Falls $u_\varphi =$ konst., nennt man das Medium nichtdispersiv, $\omega(k)$ ist eine Gerade, und $u_G = u_\varphi$. Anderenfalls haben wir:

$$u_G = \frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}k} = u_\varphi + k\left(\frac{\mathrm{d}u_\varphi}{\mathrm{d}k}\right)\ldots$$

In einem dispersiven Medium (z. B. Licht in Glas oder Wasser: »normale Dispersion«) gilt $\mathrm{d}u_\varphi/\mathrm{d}k < 0$ und $u_G < u_\varphi$.

Fourier-Analyse

Bisher haben wir nur harmonische Schwingungen oder Wellen betrachtet: diejenige, die mit einer einfachen Sinus- oder Kosinusfunktion beschrieben werden können. In der Natur kommen jedoch viele periodische Vorgänge vor, die nicht harmonisch, sondern durch kompliziertere Funktionen zu beschreiben sind. Sie können trotzdem alle ähnlich behandelt werden, wie die harmonischen Phänomene, die wir bisher angeschaut haben.

Dies ist von dem Mathematiker J. FOURIER vor längerer Zeit gezeigt worden. Der *Satz von* FOURIER sagt, daß *jede* periodische Funktion, egal welcher Form, als Summe von Sinus- und/oder Kosinus-Funktionen beschrieben werden kann:

$$F(t) = \sum A(\omega_i) \sin(\omega_i t)$$

Hier ist $F(t)$ die (beliebige) periodische Zeitfunktion, die ω_i sind Frequenzen (eine Grundfrequenz ω_1 und Vielfache davon), die durch den Laufindex i numeriert sind, die $A(\omega_i)$ sind Amplituden (d. h. Zahlen, die die Wichtigkeit der jeweiligen Frequenzkomponenten ω_i angeben), und die Summe erfaßt soviele Freqenzen (Werte vom Laufindex i) wie nötig, um die Funktion $F(t)$ darzustellen.

Die Angabe der Frequenzen ω_i und Amplituden $A(\omega_i)$ für eine (z. B. gemessene) Funktion $F(t)$ nennt man »Fourier-Zerlegung«; umgekehrt kann man eine beliebige Funktion $F(t)$ durch Wahl der Amplituden und Frequenzen aufbauen – dies heißt »Fourier-Synthese«. Der Überbegriff für beide Verfahren ist die »Fourier-Analyse«. Das Ergebnis – in beiden Richtungen – nennt man eine »Fourier-Transform«.

Diese Verfahren sind in den letzten 20 Jahren – seitdem es preiswerte und leistungsfähige elektronische Rechner gibt – sehr wichtig geworden. Sie werden in der Strukturanalyse der Materie mittels Streuexperimenten (Elektronenstreuung, Neutronenstreuung, Röntgenstreuung), aber auch in der Spektroskopie[2] und

[2] Infrarot Schwingungs-Spektroskopie an Molekülen, magnetische Kernresonanz-Spektroskopie

vor allem bei bildgebenden Methoden[3] verwendet, um die erhaltenen Informationen nutzbar zu machen.

Auch nicht periodische Funktionen $G(t)$ können so analysiert werden – nur dann muß die Summe durch ein Integral ersetzt werden, die Frequenzen werden nun kontinuierlich variiert:

$$G(t) = \int A(\omega)\sin(\omega\, t)\,\mathrm{d}\omega \qquad \text{bzw.} \qquad A(\omega) = \int G(t)\sin(\omega\, t)\,\mathrm{d}t\ .$$

[3] Resonanz-Tomographie, Röntgen-Tomographie, Positron-Emissions-Tomographie

Akustik

Die Akustik behandelt die Erzeugung und Ausbreitung von Schallwellen. Der Schall ist eine longitudinale Welle, die sich in einem materiellen Medium ausbreitet (Luft, Wasser, Metall usw.). Er spielt eine besonders wichtige Rolle auch in den biomedizinischen Wissenschaften, weil Menschen und Tiere Sinnesorgane für die Aufnahme von Schallwellen besitzen. Wie bereits besprochen, hängt die Ausbreitungsgeschwindigkeit u von Schallwellen von zwei Eigenschaften des Mediums ab, von seiner »rücktreibenden Kraft« (durch den Kompressionsmodul bzw. Elestizitätsmodul bestimmt) sowie von seiner Trägheit (durch die Massendichte ρ bestimmt; vgl. Seilwellen).

In Medien, wo sich der Schall dreidimensional ausbreitet, ist der Kompressionsmodul maßgebend:

$$u = \sqrt{\frac{K}{\rho}}\,.$$

Dies ist der Fall bei Gasen und Flüssigkeiten. In Gasen läßt sich der Kompressionsmodul K mit Hilfe der Zustandsgleichung (siehe Wärmelehre im Abschnitt 1, Seite 140) als Funktion des Drucks P ausdrücken: $K = P\kappa$ [wobei angenommen wird, daß die Schallausbreitung so schnell abläuft, daß kein Temperaturausgleich möglich ist (adiabatisch). Dann ist κ der sogenannte Adiabatenexponent ($\kappa \simeq 1{,}4$ für Luft)].

Da Dichte und Druck einander proportional sind, ergibt sich für die Schallgeschwindigkeit in Luft dann:

$$u = \sqrt{\kappa \frac{RT}{M}}$$

Wo R die »allgemeine Gaskonstante«, T die absolute Temperatur und M die Molmasse des Gases sind (Zahlenwert für Luft bei 20 °C : $u = 343$ m/s).

Bei Schallausbreitung in z. B. einem Metallstab ist der Elastizitätsmodul E maßgebend, die Schallgeschwindigkeit ist gegeben durch

$$u = \sqrt{\frac{E}{\rho}}\,.$$

In festen Medien können auch transversale Schallwellen auftreten.

Die Größe, die als »Auslenkung« von einer Schallwelle angesehen werden kann, ist die lokale Dichte des Mediums: die Welle besteht aus einer Folge von Verdichtungen und Verdünnungen entlang der Ausbreitungsrichtung. In Gasen sind Druck und Dichte einander proportional, so daß eine Schallwelle auch als Druckwelle in solchen Medien beschrieben werden kann.

Um uns die Erzeugung einer Schallwelle vorzustellen, nehmen wir als Modell eine lange Säule des Mediums (z. B. Wasser in einem Rohr, oder eine Luftsäule in einer Orgelpfeife). An einem Ende wird durch einen Kolben ein Stoß auf das Medium abgegeben, der eine Schallwelle erzeugt, welche sich in dem Medium mit der Geschwindigkeit u entlang der Säulenachse fortpflanzt. Der Kolben wird mit der (kleineren) Geschwindigkeit v während des Zeitintervalls Δt mit der Kraft F bewegt, und erzeugt somit den Kraftstoß $F\,\Delta t$. Mit der Definition des Druckes $P = F/A$ (Kraft pro Fläche), ist dann der Kraftstoß $F\,\Delta t = A\,\Delta P\,\Delta t$.

Aus der Mechanik wissen wir, daß der Kraftstoß gleich die Impulsänderung (d. h. Masse · Geschwindigkeit) ist. Die von dem Kolben bewegte Masse des Mediums beträgt $\Delta m = \rho\, V = \rho\, A\, \Delta x$ (wo ρ die Massendichte und V das in der Zeit Δt bewegte Volumen des Mediums sind, mit Δx = Bewegungsstrecke der Welle, wobei $u = \Delta x/\Delta t$ oder $\Delta x = u\Delta t$ gilt; siehe Abb. 0.21 auf der folgenden Seite): die Impulsänderung Δmv ist somit

$$\Delta mv = (\rho\, A \Delta x)v = (\rho\, A\, u \Delta t)v$$

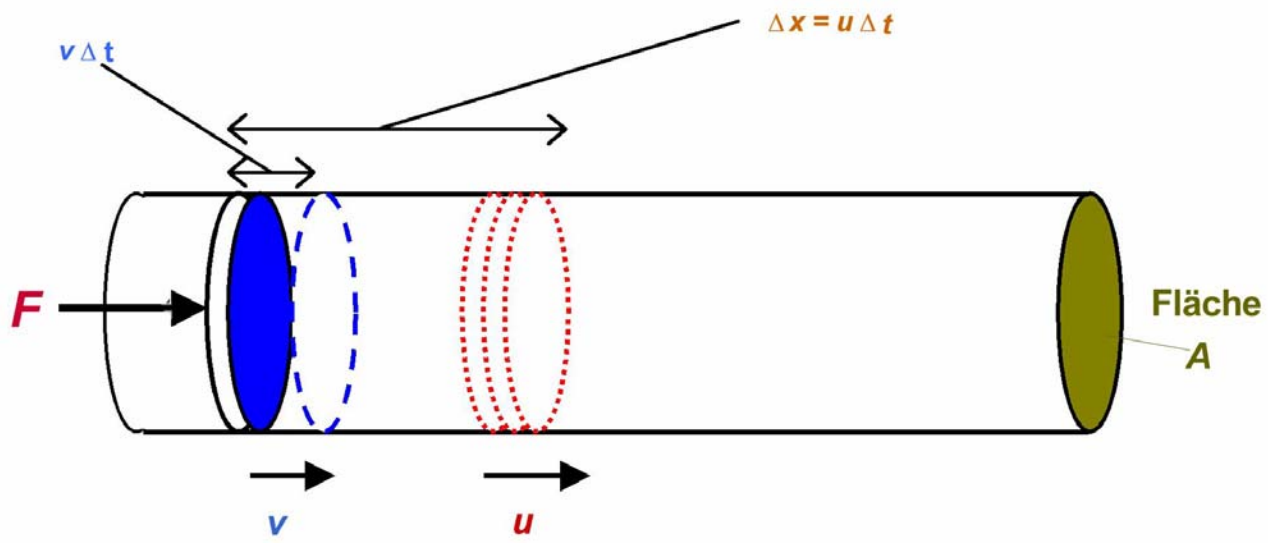


Abbildung 0.21.

Gleichsetzen vom Kraftstoß $A\,\Delta P \Delta t$ mit der Impulsänderung ergibt:

$$A\Delta P\Delta t = (\rho A u \Delta t)v \qquad \text{oder} \qquad \Delta P = \rho u v \tag{0.1}$$

Die Druckänderung hängt mit der Volumenänderung über dem Kompressionsmodul zusammen:

$$\Delta P = -K\frac{\Delta V}{V} \tag{0.2}$$

Das Volumen V, das in der Zeit Δt in Bewegung ist, beträgt $A\Delta x = Au\Delta t$ (s. oben); die Volumen*änderung* in der Zeit Δt ist durch die Bewegung des Kolbens gegeben, $\Delta V = -Av\Delta t$. Einsetzen in die Beziehung (0.2) für ΔP ergibt:

$$\Delta P = \frac{-K\,(-Av\Delta t)}{Au\Delta t} = K\frac{v}{u}\,. \tag{0.3}$$

Der Vergleich von Gl. (0.3) mit Gl. (0.1) ergibt dann:

$$K\frac{v}{u} = \rho u v$$

oder

$$u^2 = \frac{K}{\rho}$$

d. h.

$$u = \sqrt{\frac{K}{\rho}}\,.$$

Damit ist die obige Beziehung für die Schallgeschwindigkeit u bestätigt.

Schallstärke und Lautstärke

Ein Mass für die Schallstärke in einer sich dreidimensional ausbreitenden Schallwelle ist die *Intensität* der Welle, definiert als die von der Welle übertragene Schallenergie pro Zeit und Fläche (die Schallleistung, die auf eine Fläche A fällt):

$$I = \frac{\Delta E}{A\,\Delta t}\,.$$

Unser Hörvermögen empfindet nicht direkt die Schallintensität; vielmehr ist die gehörte Lautstärke logarithmisch. Damit hat das Ohr eine große dynamische Skala, es kann über einen sehr großen Bereich von Schallstärken den Schall aufnehmen. Man definiert deshalb die Lautstärke β als Dezimal-Logarithmus der Schallintensität:

$$\beta = 10 \log \left(\frac{I}{I_0}\right)$$

(Einheit »Dezibel (akustisch)« $\widehat{=}$ $\mathrm{dB_A}$). Hier ist I_0 die Schallintensität an der Hörschwelle, $I_0 = 10^{-12}\mathrm{W/m^2}$. Demnach ist die Lautstärke der Hörschwelle gegeben durch

$$\beta = 10 \log \left(\frac{I_0}{I_0} \right) = 10 \log(1) = 0 \ \mathrm{dB_A}$$

und die Schmerzschwelle $I_\mathrm{S} \widehat{=} \ 1\mathrm{W/m^2}$ durch

$$\beta = 10 \log 10^{12} = 120 \ \mathrm{dB_A} \ .$$

Akustische Schwebungen

Überlagert man zwei Schallwellen mit unterschiedlicher Frequenz, so entstehen Schwebungen (vgl. »gekoppelte Schwingungen«). Die beiden Wellen schwächen sich ab und verstärken sich abwechselnd; man hört dieses auf und ab als periodische Änderung der Lautstärke, die um so langsamer abläuft, je näher die beiden Frequenzen zueinander liegen. Mathematisch läßt sich dieses Phänomen als Überlagerung von zwei Sinus- oder Kosinuswellen beschreiben (siehe »Wellengruppen«), so daß das Ergebnis als Produkt einer zeitabhängigen Amplitude mit einer »mittleren Welle« geschrieben werden kann:

$$\Psi(t) = \{A_0 \ \cos\left[\Delta\omega \, t\right]\} \cos[<w> t] \ .$$

Die Wellenfunktion Ψ stellt hier entweder den Schalldruck oder die Dichte des Mediums dar (hier ist nur die Zeitabhängigkeit berücksichtigt, die Ortsabhängigkeit gehorcht aber auch einer ähnlichen Beziehung). Die Schwebungsfrequenz $\Delta\omega$ ist gegeben durch $\Delta\omega = (\omega_1 - \omega_2)/2$ und wird sehr klein, wenn sich die beiden überlagerten Frequenzen sehr nah liegen; die mittlere Frequenz $< \omega >$ ist der Mittelwert der überlagerten Frequenzen: $<w>= (\omega_1 + \omega_2)/2$.

Der Ultraschall

Menschen hören in einem Frequenzereich zwischen ca. 10 Hz und ca. 20 kHz. Schallwellen, die wesentlich höhere Frequenzen haben, heißen » Ultraschall«. Sie breiten sich in der Luft kaum aus, dafür aber in kondensierten Medien – Wasser oder feste Materie – mehr oder weniger gut. Sie können daher benutzt werden, um unsichtbare Strukturen innerhalb der Materie, z. B. auch innerhalb des menschlichen Körpers, zu untersuchen. Reflektion der Ultraschallwellen an inneren Strukturen führt nämlich zu Echos, die nachgewiesen und zu einem Bild verarbeitet werden können.

[Versuche mit Ultraschallgenerator und mit Echobildern]

Elektromagnetische Wellen

Allgemeine Eigenschaften

Elektromagnetische Wellen, Entstehung und Ausbreitung, das elektromagnetische Spektrum

Die zweite Wellenart, außer Schallwellen, die direkt von menschlichen Sinnesorganen wahrgenommen werden kann, sind die Lichtwellen. Sie sind Beispiele für elektromagnetische Wellen und bilden einen (kleinen) Teil des elektromagnetischen Spektrums.

Im Gegensatz zu Schallwellen sind elektromagnetische Wellen nicht an ein materielles Medium gebunden – sie können sich auch in einem perfekten Vakuum ausbreiten. Sie sind auch nicht longitudinale, sondern transversale Wellen. Die »Auslenkungsgrößen« sind nicht mechanische Eigenschaften (wie z. B. der Druck oder die Dichte bei Schallwellen), sondern, wie der Name besagt, elektrische und magnetische Größen: genauer, ein elektrisches und ein magnetisches Feld.

Die Eigenschaften solcher Felder werden wir uns später genauer anschauen; zunächst reicht es zu wissen, daß sie Energie speichern können, und daß sie sich gegenseitig aufbauen können (wenn sie zeitabhängig sind, z. B. sinusförmig wie in einer harmonischen Welle).

Elektromagnetische Wellen sind tatsächlich harmonisch, sie bestehen aus sinusförmigen elektrischen und magnetischen Feldern, welche senkrecht zueinander und senkrecht zur Ausbreitungsrichtung stehen (daher *transversale* Wellen!). Diese Felder schwingen in der Zeit mit der Frequenz ν (bzw. der Kreisfrequenz $\omega = 2\pi\,\nu$) und wiederholen sich als Funktion vom Ort entlang der Ausbreitungsrichtung nach der Wellenlänge λ (bzw. Wellenzahl $k = 2\pi/\lambda$).

Es gilt die übliche Grundgleichung der Wellenlehre:

$$c = \lambda\,\nu = \frac{\omega}{k}$$

wo c die Ausbreitungsgeschwindigkeit (Phasengeschwindigkeit) der Wellen ist. Sie ist wiederum eine Funktion der Konstanten des Mediums.

Bei Ausbreitung im Vakuum ist das »Medium« eben dieses Vakuum: es hat eine elektrische Eigenschaft (die »Durchlässigkeit« oder » Permittivität« für elektrische Felder, ausgedrückt durch die »elektrische Feldkonstante« ε_0), sowie eine magnetische Eigenschaft (die »Permeabilität« für magnetische Felder, gegeben durch die entsprechende »magnetische Feldkonstante« μ_0).

In Analogie zu mechanischen Wellen (z. B. Seilwellen) kann man den Kehrwert der Konstanten ε_0 als eine Art »rücktreibende Kraftkonstante« (für elektrische Ladungen) und die Konstante μ_0 als eine Art »Trägheitskonstante« (für die Bewegung von elektrischen Ladungen) bezeichnen. Diese Analogie werden wir bei der Elektrizitätslehre weiter ausbauen. Es folgt für die Lichtgeschwindigkeit im Vakuum:

$$c = \sqrt{\frac{1}{\varepsilon_0\,\mu_0}}$$

Sie ist eine Naturkonstante (sogar die best-bekannte Naturkonstante) und hat den Zahlenwert 299 792 456,2 m/s (also etwa 1 Million mal schneller als der Schall in Luft).

Diese Geschwindigkeit gilt für alle Arten von elektromagnetischen Wellen im Vakuum [d. h. für Licht, aber auch für Radiowellen, Mikrowellen (Radar), »Millimeterwellen«, infrarotes Licht (»Wärmestrahlung«), ultraviolettes Licht, Röntgenstrahlen und Gammastrahlen]. In Materie kommen die entsprechenden material-spezifischen Konstanten dazu (die »relative Permittivität« oder »Dielektrizitätskonstante« ε_r sowie die »relative Permeabilität« μ_r). Beide sind üblicherweise ≥ 1, so daß die sich ergebende Geschwindigkeit

$$c_\mathrm{M} = \sqrt{\frac{1}{\varepsilon_0\,\varepsilon_\mathrm{r}\,\mu_0\,\mu_\mathrm{r}}}$$

kleiner als c (im Vakuum) ist. Das Verhältnis $N = c/c_\mathrm{M}$ ist auch eine Eigenschaft der Materie und nennt sich Brechungsindex oder Brechzahl:

$$N = \frac{c}{c_\mathrm{M}} = \sqrt{\frac{\varepsilon_0\,\varepsilon_\mathrm{r}\,\mu_0\,\mu_\mathrm{r}}{\varepsilon_0\,\mu_0}} = \sqrt{\varepsilon_\mathrm{r}\,\mu_\mathrm{r}} \geq 1\ .$$

Wir werden sie in der Optik (siehe Abschnitt 3, Seite 231) verwenden können.

Entstehung von elektromagnetischen Wellen

Ebenso wie Seilwellen durch eine Beschleunigung von Seilabschnitten oder Schallwellen durch die Beschleunigung von Materieteilchen (Atomen oder Molekülen in dem Medium) entstehen, kommen elektromagnetische Wellen durch beschleunigte elektrische Ladungen zustande.

Diese Ladungen können in einzelnen Atomen gebunden sein (Lichtemission durch elektronische Energieübergänge in Atomen oder Molekülen), sie können im freien Raum sein (schwingende Elektronen im Vakuum in einem Radarsender [Klystron] oder in Materie [schwingende Ladungen in einer Sendeantenne]), sie können selbst die Ladungen im Atomkern sein (Emission von Gammastrahlen durch einen angeregten Kern).

Die elektromagnetischen Wellen gehorchen einer Wellengleichung, genau derjenigen, die wir für die Seilwellen hergeleitet haben. Für das elektrische Feld E lautet sie (eindimensional):

$$\frac{\partial^2 E}{\partial x^2} = \left(\frac{1}{c^2}\right) \frac{\partial^2 E}{\partial t^2}$$

Die Konstante c ist wieder die Ausbreitungsgeschwindigkeit der elektromagnetischen Wellen im Vakuum.

Das elektromagnetische Spektrum

Das elektromagnetische Spektrum erstreckt sich über viele Größenordnungen in ν und λ, und entsprechend in der Energie der Wellen (die proportional ν ist), siehe dazu Abb. 0.22 auf der nächsten Seite.

Die Art und Größe des »Wellengenerators«, welcher die Wellen ausstrahlt, sind auch sehr unterschiedlich: für langwellige Radiowellen ist er eine Antenne von mehreren hundert Meter Länge; für Mikrowellen eine Vakuumröhre von einigen cm Durchmesser; für Licht einzelne Atome oder Moleküle; und für γ-Strahlen, einzelne Atomkerne. Grundsätzlich gilt aber:

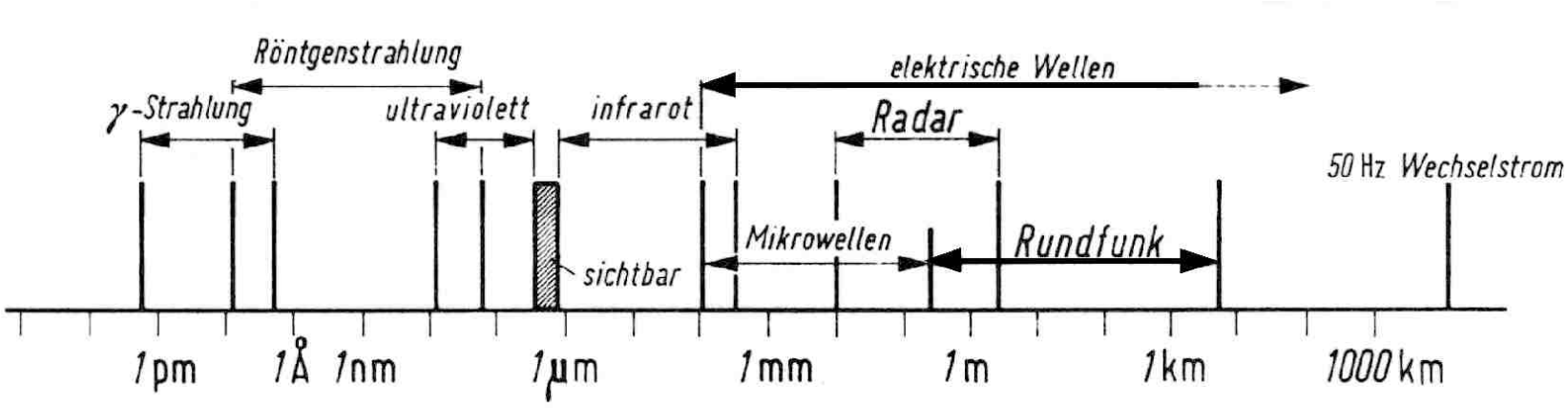


Abbildung 0.22.

Beschleunigte Ladungen strahlen Energie in Form von elektromagnetischen Wellen aus.

Hydrostatik: ruhende Flüssigkeiten

In einer Flüssigkeit sind die Teilchen (Atome, Moleküle) fest aneinander gebunden durch sogenannte Kohäsionskräfte, die Teilchen lassen sich jedoch beliebig aneinander vorbeischieben. Dies führt dazu, daß sich das Volumen der Flüssigkeit nur schwer ändern läßt (Flüssigkeiten sind kaum komprimierbar!), die Form der Flüssigkeit aber beliebig ist (Volumenelastizität, aber keine Formelastizität).
Wirkt eine Kraft auf eine bewegliche Gefäßwand (»Stempel«), so wird sie innerhalb der Flüssigkeit als Druck übertragen. Der Druck wirkt allseitig und überall in der Flüssigkeit; er ist daher nicht eine Vektorgröße. Der Druck ist definiert als »Kraft pro Fläche«:

$$\text{Druck} = \frac{\text{wirkende Kraft}}{\text{Angriffsfläche}} \qquad P = \frac{F}{A}$$

Druckeinheit = $\mathrm{N/m^2} \equiv \mathrm{Pa}$ (Pascal), wobei die auf der Fläche A *senkrecht* stehende Kraftkomponente gemeint ist. (Zum Vergleich: der Atmosphärendruck, der auf der Erdoberfläche aufgrund des Gewichts der Lufthülle wirkt, beträgt etwa 100 000 Pa. Man definiert daher eine weitere Druckeinheit, das bar:

$$1\ \mathrm{bar} = 10^5\,\mathrm{Pa}\ .$$

Wir sprechen von einer idealen Flüssigkeit, wenn das Volumen exakt konstant bleibt (keine Komprimierbarkeit) und die Formänderung (z. B. Fließen) ohne Widerstand geschieht (keine Formelastizität). Wirkliche Flüssigkeiten (reale Flüssigkeiten) haben diese idealen Eigenschaften nur annähernd; insbesondere zeigen sie einen Widerstand (Zähigkeit) gegenüber Formänderungen.

Der hydrostatische Druck: Schweredruck

Schweredruck

Der Schweredruck entsteht durch das Gewicht der Flüssigkeit, welche über dem Meßpunkt liegt. Er ist gegeben durch die Gewichtskraft, geteilt durch die Fläche des Behälters:

$$\Delta P(h) = \frac{mg}{A} = \frac{\rho V g}{A} = \frac{\rho g A h}{A} = \rho g h$$

wo ρ die Massendichte der Flüssigkeit bezeichnet. Der Schweredruck steigt also linear mit wachsender Tiefe in der Flüssigkeit an, bei der Tiefe h hat er den Wert:

$$P(h) = \rho g h$$

Der Stempeldruck

Der Gesamtdruck in einer ruhenden Flüssigkeit, der sogenannte hydrostatische Druck, ist die Summe vom Stempeldruck P_0 und Schweredruck $P(h)$:

$$P = P_0 + P(h)$$

Dieser Druck wirkt bei gegebener Tiefe überall gleich, er ist nicht richtungsabhängig und hängt auch nicht von der Form des Behälters ab (»hydrostatisches Paradoxon«).

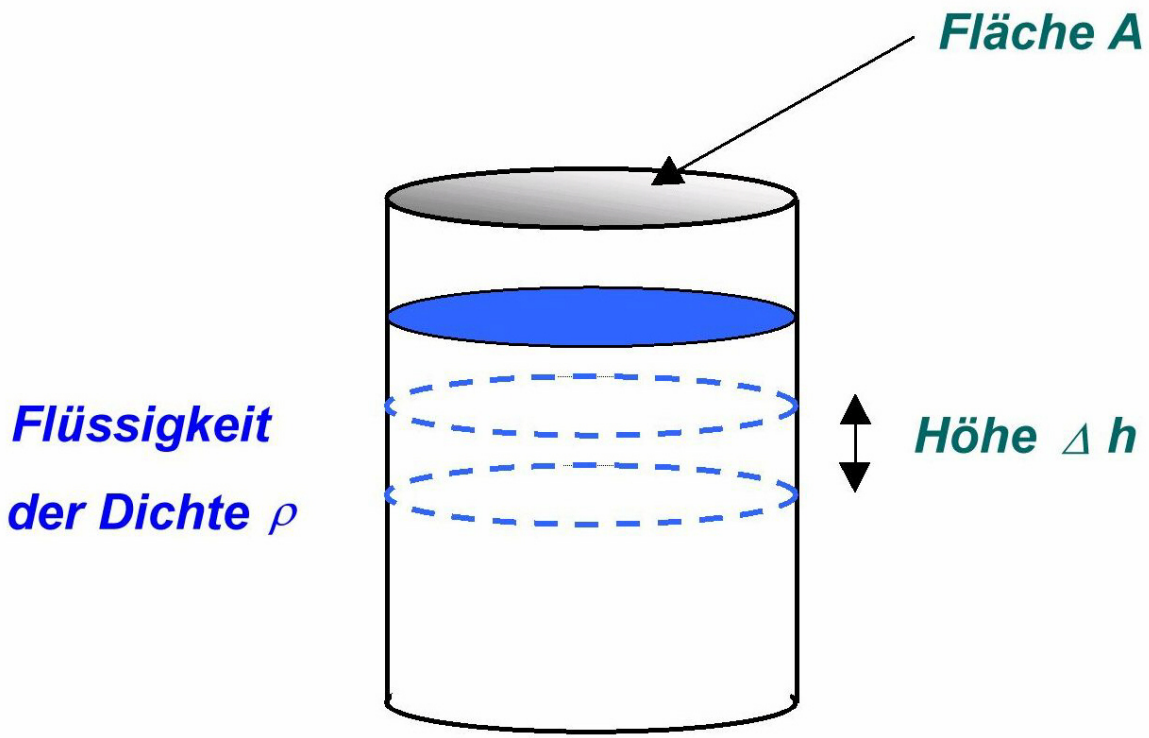


Abbildung 0.23. Schweredruck in einer Flüssigkeit der Dichte ρ

Auftrieb

Taucht ein Objekt in die Flüssigkeit ein, wirkt an seiner unteren Fläche aufgrund des Schweredrucks ein höherer Druck, als an der oberen Fläche. Dies führt zu einer Nettokraft, die das Objekt anzuheben versucht: sein Gewicht ist geringer in der Flüssigkeit. Diese Kraft nennt man Auftrieb F_A, sie ist gleich dem Gewicht der verdrängten Flüssigkeit m_v (Prinzip von ARCHIMEDES, siehe Abb. 0.24 auf der folgenden Seite).

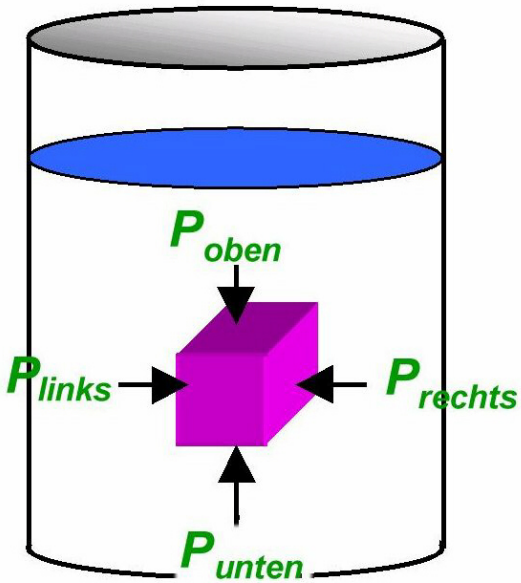


Abbildung 0.24. Druckverhältnisse um ein Objekt in einer Flüssigkeit; der Druck von unten ist um den Schweredruck der verdrängten Flüssigkeit größer als der Druck von oben

$$\begin{aligned} \vec{F_A} &= m_v \cdot \vec{g} = \rho_v \cdot \vec{g} \cdot V \\ \vec{F_{res}} &= m_K \cdot \vec{g} - m_v \cdot \vec{g} = (\rho_K - \rho_v)\vec{g} \cdot V \end{aligned}$$

Der Auftrieb $\vec{F_A}$ eines Körpers K ist gleich der Gewichtskraft der von ihm verdrängten Flüssigkeit $m_v \cdot \vec{g}$ und von der Gestalt und vom Material des Körpers unabhängig. Die resultierende Kraft $\vec{F_{res}}$, die entscheidet, ob ein Körper in der Flüssigkeit schwimmt, schwebt oder sinkt, ist die Differenz aus der Masse des verdrängten Volumens $\rho_v \cdot \vec{g} \cdot V$ und der Masse des verdrängenden Volumens $\rho_K \cdot \vec{g} \cdot V$.

n.b. In einer nicht-idealen (komprimierbaren) Flüssigkeit bzw. in einem Gas nimmt der Schweredruck nicht mehr linear mit wachsender Tiefe zu, da sich das Medium zunehmend komprimiert aufgrund des wachsenden Drucks; die Dichte nimmt damit auch zu. Dies führt bei einer komprimierbaren Fluide (Gas oder Flüssigkeit) zur barometrischen Höhenformel: Druck und Dichte nehmen exponentiell mit wachsender Tiefe zu. Diese Formel kann als wichtiges Beispiel des thermischen Gleichgewichtes (BOLTZMANN-Gleichgewicht) angesehen werden (s. Wärmelehre).

Grenz- und Oberflächen

Ein Flüssigkeitsteilchen innerhalb des Volumens der Flüssigkeit erfährt von allen Richtungen gleiche Kohäsionskräfte, es herrscht ein Kräftegleichgewicht. Bringt man das Teilchen an die Oberfläche, fehlen die Kräfte auf der einen Seite (Tafelbild!), das Gleichgewicht ist gestört. Es kostet also eine Kraftanstrengung, (bzw. Arbeit W muß geleistet werden), um ein Teilchen an die Oberfläche zu führen, seine (potentielle) Energie ist dort größer. Diese zusätzliche Energie, geteilt durch die entsprechende Fläche, nennt man die spezifische Oberflächenenergie ε:

$$\varepsilon = \frac{W}{A} \qquad \left(\frac{\mathrm{J}}{\mathrm{m}^2}\right).$$

Diese spezifische Oberflächenenergie ist eine Eigenschaft der Flüssigkeit (und ggf. auch der gegenüberliegenden Materie an der Grenzfläche). Sie kann z. B. durch Aufheben eines Films aus der Flüssigkeit durch einen Drahtbügel gemessen werden. Dabei mißt man die nötige Arbeit W, um die Fläche des Films um den Betrag A zu erhöhen, bzw. (wahlweise) die dazu nötige Kraft, die man durch die Breite des Bügels l geteilt als Oberflächenspannung σ bezeichnet:

$$\varepsilon = \frac{W}{A} \doteq \sigma = \frac{F}{l}_{124} \qquad \left(\frac{\mathrm{J}}{\mathrm{m}^2} \equiv \frac{\mathrm{N}}{\mathrm{m}}\right).$$

Da die Oberflächenenergie es allgemein energetisch ungünstig macht, eine freie Fläche zu vergrößern, bildet eine Flüssigkeit sog. »Minimalflächen« (vgl. Seifenblasen).

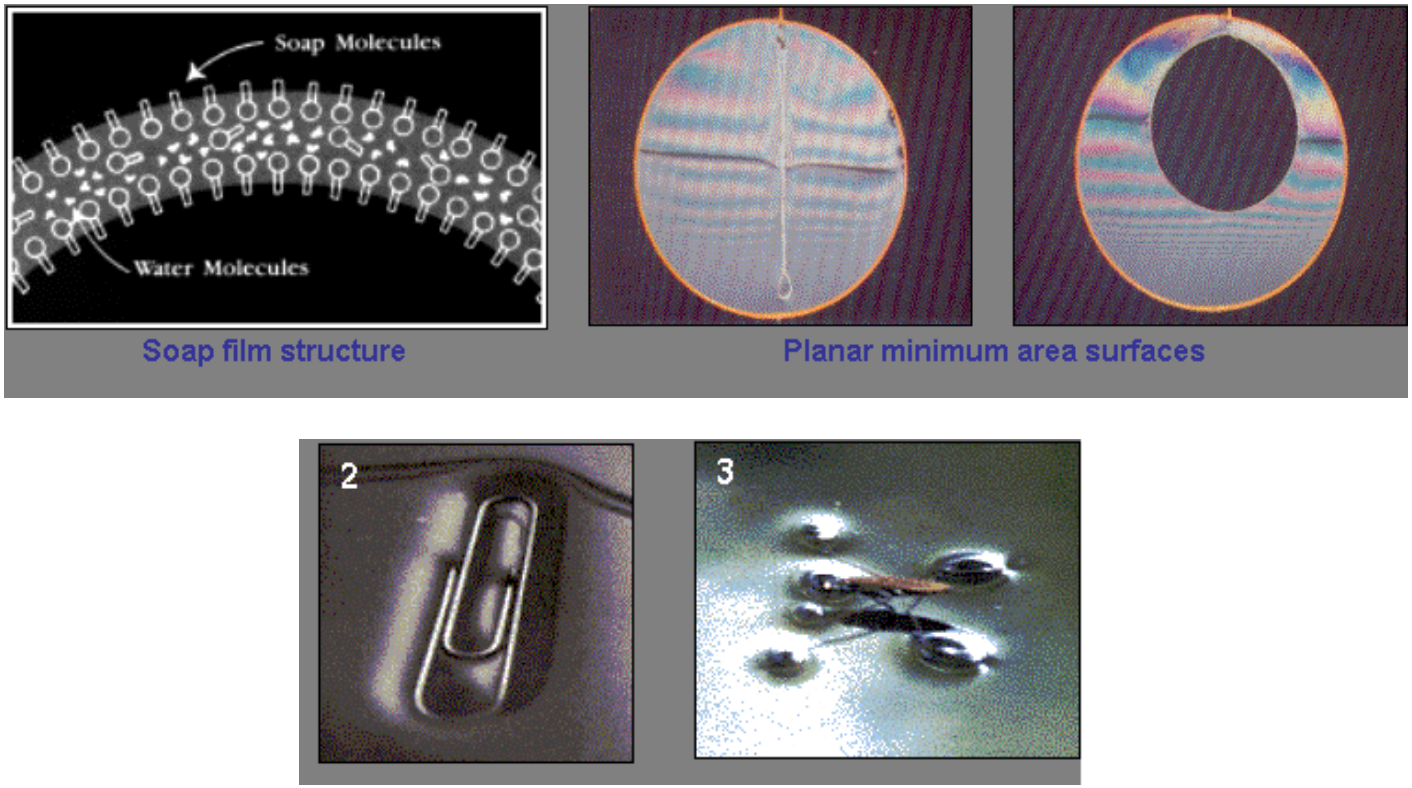
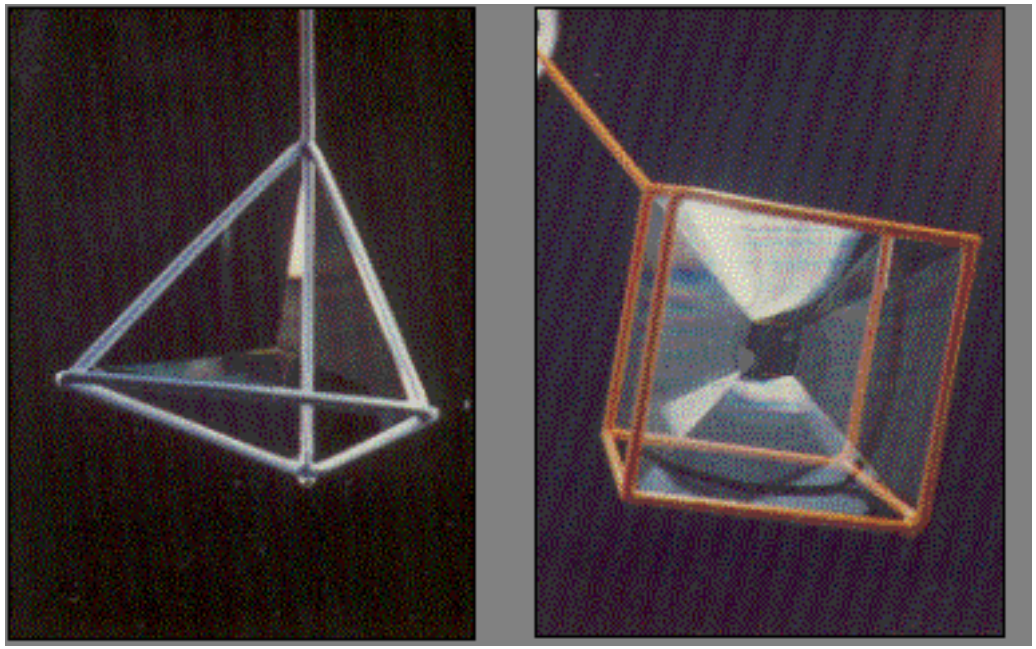
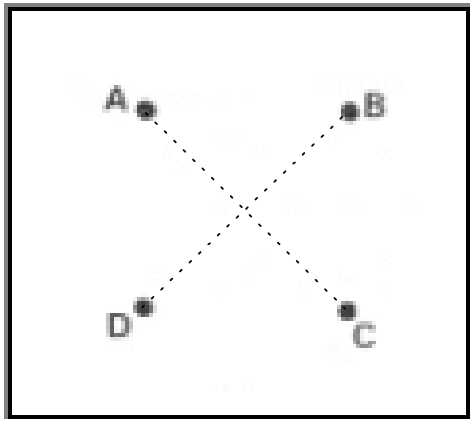
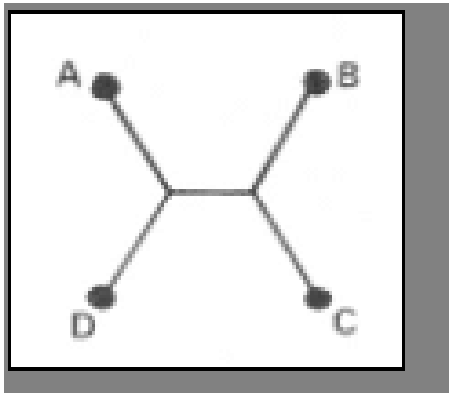


Abbildung 0.25. Seifenblasen und Oberflächenspannung

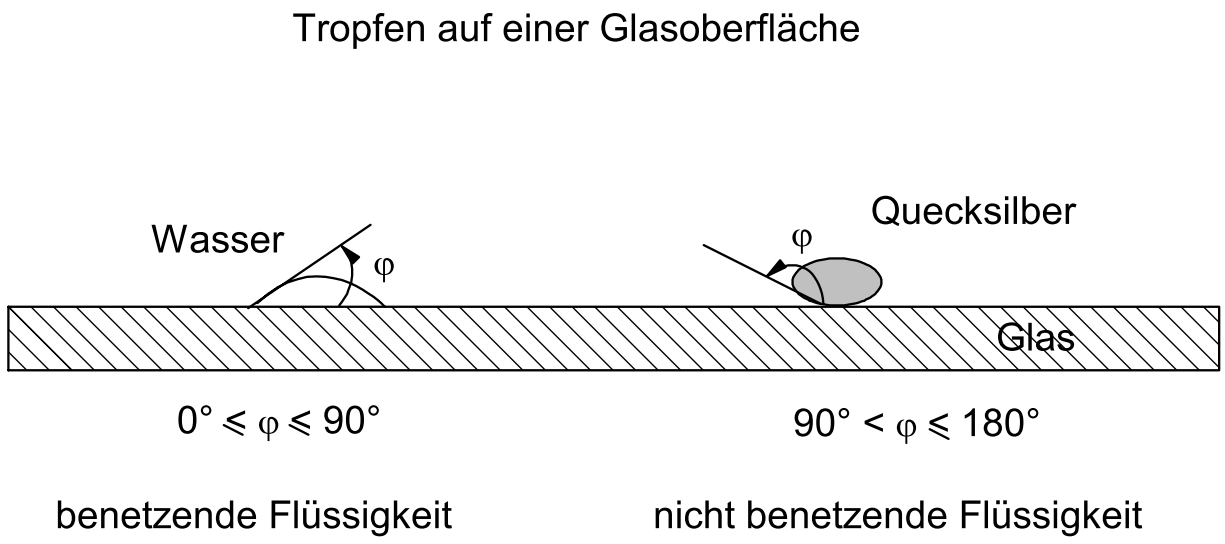






direkte Verbindung ~ 9,05 cm, bei s(AB)=3,2 cm
optimierte Lösung (rechts) ~ 8,7 cm

Falls die Flüssigkeit an der Grenzfläche in Kontakt mit einer anderen Materie tritt, kommt es auf die relative Stärke der Kohäsionskräfte zwischen den eigenen Flüssigkeitsteilchen und den Adhäsionskräften zwischen Flüssigkeit und angrenzender Materie an. Falls letztere stärker sind, spricht man von einer »benetzenden Flüssigkeit« $0 \leq \varphi \leq 90$; ein Tropfen breitet sich möglichst aus. Anderenfalls bleibt der Tropfen möglichst geschlossen (nicht-benetzende Flüssigkeit $90 > \varphi \geq 180$).



Dies erklärt auch die Kapillarwirkung bei einer Flüssigkeit in einem engen Rohr:

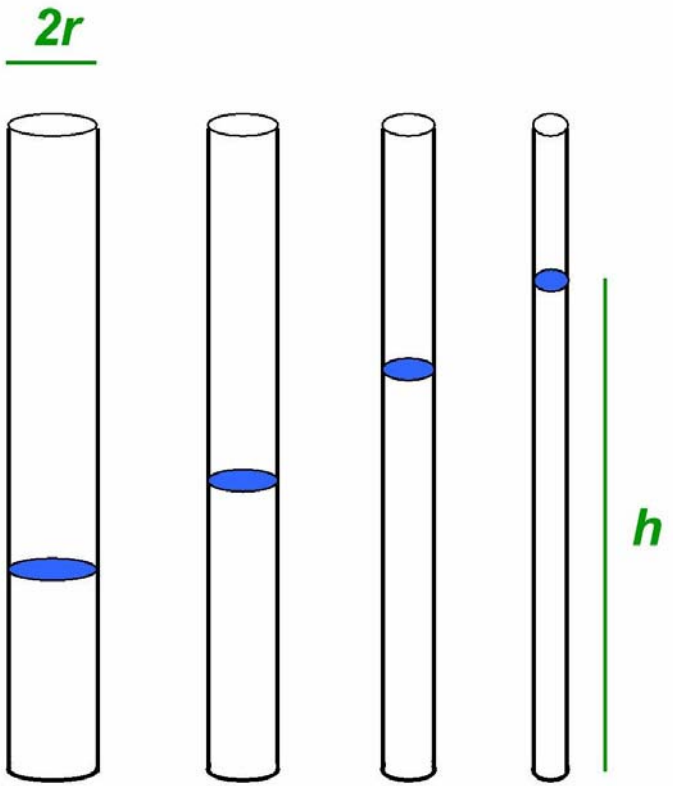
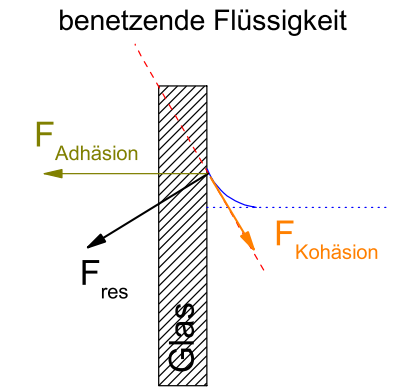
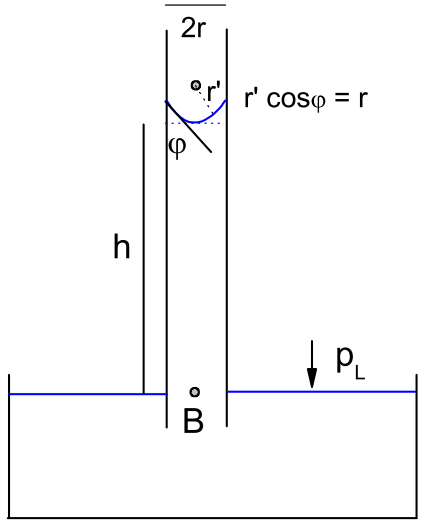


Abbildung 0.27. Die Steighöhe einer Flüssigkeit in einem Kapillarrohr (relativ zur Höhe der Flüssigkeit außerhalb des Rohrs) kann durch eine einfache Überlegung aus der spezifischen Grenzflächenenergie berechnet werden. Die Energieerhöhung ΔE_{pot} durch das Anheben der Flüssigkeit um die Höhe h im Rohr ist gegeben durch $\Delta E_{\text{pot}} = mgh = \rho V g h = \rho g \pi r^2 h^2$. Der Energiegewinn durch die Oberflächenenergie ist $\Delta E_{\text{obf}} = \varepsilon A_{\text{kontakt}} = \varepsilon 2\pi r h$. Aus der Energiebilanz $\Delta E_{\text{pot}} = \Delta E_{\text{obf}}$ erhalten wir: $\rho g r h = 2\varepsilon$ oder $h = 2\varepsilon/\rho g r$ oder $h = 2\sigma/\rho g r$. Vgl. Skizze, oben.





p_L: Luftdruck

p_K: Kohäsionsdruck $p_K=(2\sigma\cos\varphi) / r$

p_S: Schweredruck $p_S= \rho\ g\ h$

σ: Oberflächenspannung

Am Punkt B wirkt der Druck $p(B)=p_L=p_L-p_K+p_s$

Aus der Druckberechnung am Ort B ergibt sich für die kapillare Steighöhe h:

$$h = \frac{2\sigma\cos\varphi}{r\rho g}$$

$$h = \frac{2\sigma}{r\rho g} \quad für\ \varphi = 0$$

Hydrodynamik: bewegte Flüssigkeiten

Volumenstrom, Kontinuität

Wir betrachten eine stationäre Strömung, d. h. die Geschwindigkeit der Strömung an einem gegebenen Punkt bleibt konstant im Laufe der Zeit. Außerdem betrachten wir zunächst die Strömung einer idealen Flüssigkeit, die nicht komprimierbar ist und ohne Widerstand fließt.

Eine wichtige Größe, um die Strömung zu charakterisieren, ist die Volumenstromstärke I_V:

$$I_\mathrm{V} = \frac{\Delta V}{\Delta t} \qquad \left(\frac{\mathrm{m}^3}{\mathrm{s}}\right).$$

Bei der idealen Strömung ist das Geschwindigkeitsprofil in einem Rohr gleichmäßig, es bildet eine Ebene senkrecht zur Strömungsrichtung. Bei einem Rohr vom Querschnitt A ist das Volumen, welches in der Zeit Δt durch die Querschnittsfläche mit Geschwindigkeit v fließt, gegeben durch

$$\Delta V = Av\Delta t,$$

d. h. die Stromstärke ist

$$I_\mathrm{V} = Av\ .$$

Da die Flüssigkeit inkompressibel ist und auch im Laufe der Strömung nicht erzeugt oder vernichtet wird, gilt eine *Kontinuitätsbedingung*: Das Volumen ΔV, das in einer gegeben Zeit durch eine gegebene Querschnittsfläche im Rohr fließt, muß überall gleich sein – es kann z. B. nicht mehr Flüssigkeit in das Rohr hineinfließen, als am anderen Ende in der gleichen Zeit herausfließt. M. a. W. ist die Volumenstromstärke überall gleich. Ändert sich die Querschnittsfläche des Rohrs, so muß sich die Strömungsgeschwindigkeit

v entsprechend ändern, um I_V konstant zu halten:

$$A_1\, v_1 = A_2\, v_2 \qquad \textit{oder} \qquad \frac{v_1}{v_2} = \frac{A_2}{A_1}$$

Wo der Querschnitt enger wird, muß die Flüssigkeit schneller fließen (siehe Abb. 0.28).

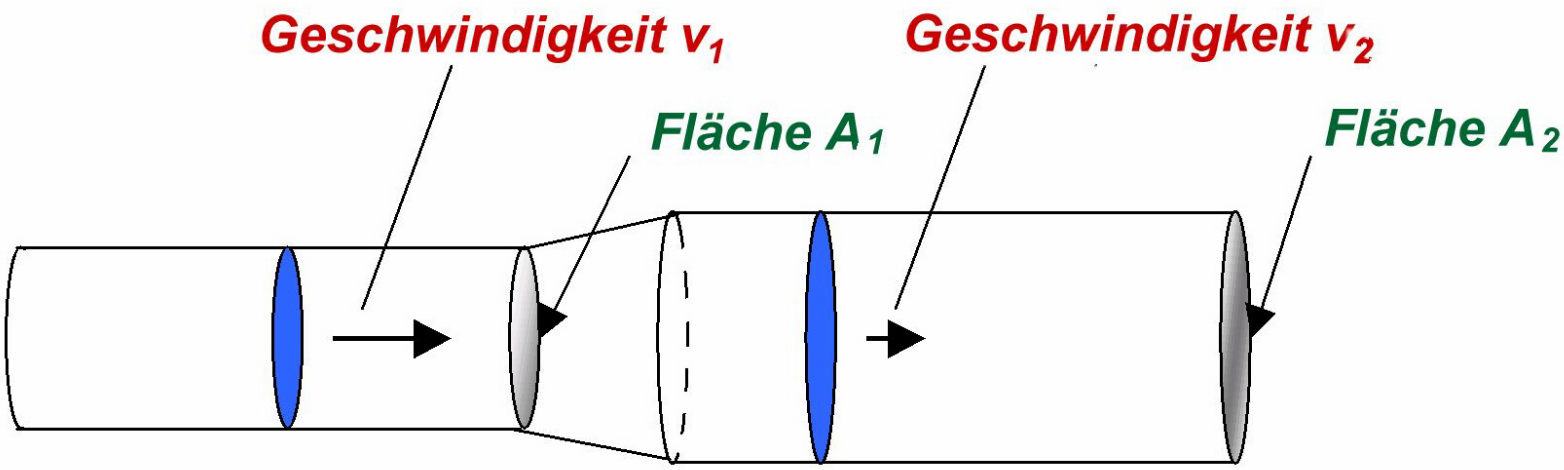


Abbildung 0.28.

Druck in der Strömung

In der strömenden Flüssigkeit herrscht an jeder Stelle ein Druck, nun aber heißt er hydrodynamischer Druck. Er besteht nicht nur aus Stempeldruck und Schweredruck, wie in der ruhenden Flüssigkeit, sondern enthält auch einen weiteren Betrag, der durch die Strömung (kinetische Energie!) zustandekommt. Wir betrachten die Energie eines Probevolumens ΔV an zwei verschiedenen Stellen (1 und 2) innerhalb einer strömenden Flüssigkeit in einem Rohr. Das Rohr soll eine Querschnittsfläche A_1 an Stelle 1 und A_2 an Stelle 2 haben. Die Arbeit, die zur Bewegung des Volumens um eine Strecke Δs_1 bzw. Δs_2 an den Stellen

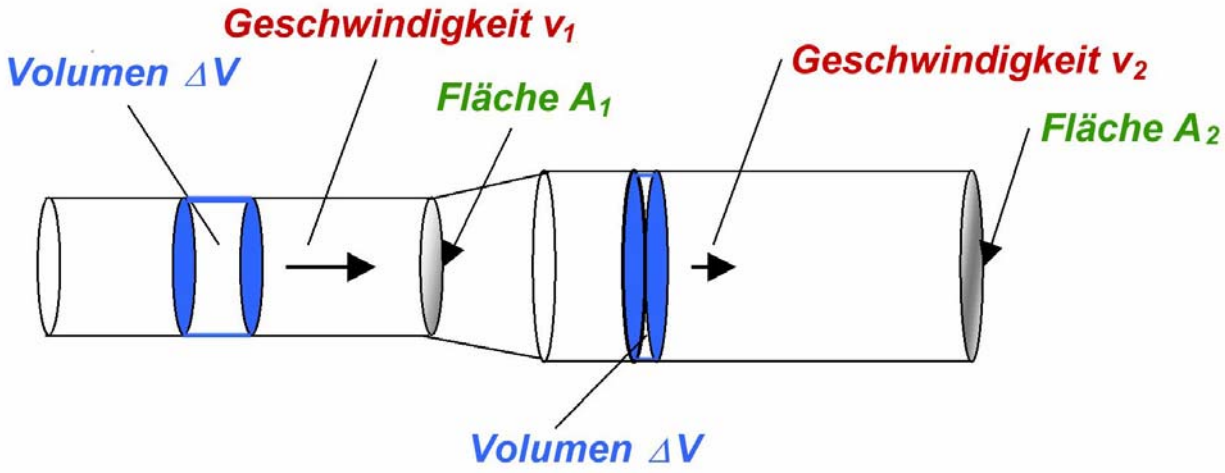


Abbildung 0.29.

1 bzw. 2 geleistet werden muß, ist:

$$\begin{aligned} \Delta W &= F_1 \Delta s_1 - F_2 \Delta s_2 \\ &= P_1 A_1 \Delta s_1 - P_2 A_2 \Delta s_2 \\ &= P_1 \Delta V - P_2 \Delta V = (P_1 - P_2)\Delta V \end{aligned}$$

Die Energiedifferenz, die durch diese Verschiebung entsteht, ist;

$$\Delta E = mg(h_2 - h_1) + \frac{1}{2}m\left(v_2^2 - v_1^2\right)$$

Setzen wir die geleistete Arbeit gleich die resultierende Energiedifferenz (Energieerhaltung!), so erhalten wir:

$$(P_1 - P_2)\Delta V = m\left[g\left(h_2 - h_1\right)\right] + \frac{m}{2}\left[\left(v_2^2 - v_1^2\right)\right]$$

oder, mit $m = \rho\Delta V$ (ρ = Massendichte), nach Umordnung:

$$\left[P_1 + \rho g h_1 + \frac{\rho}{2}v_1^2\right]\Delta V = \left[P_2 + \rho g h_2 + \frac{\rho}{2}v_2^2\right]\Delta V\,.$$

Dies heißt, die Größe $\left[P + \rho g h + \frac{\rho}{2}v^2\right]$ ist überall konstant (wir können die willkürlich gewählten Stellen 1 und 2 weglassen):

$$\left[P + \rho g h + \frac{\rho}{2}v^2\right] = konst.$$

Diese Gleichung nennt man den Satz von BERNOULLI. Er drückt die Energieerhaltung bei der Strömung aus, und gilt streng nur für die stationäre, ideale Strömung. Er besagt:

> Der Druck einer strömenden Flüssigkeit nimmt ab, wenn sie schneller und/oder aufwärts strömt und umgekehrt.

Die drei Terme in der BERNOULLI-Gleichung sind Stempeldruck, Schweredruck sowie der Druck, der durch die Strömung selbst zustandekommt ($\rho/2v^2$); dieser wird *Staudruck* genannt. Eine andere Formulierung des BERNOULLI-Satzes wäre daher:

> Die Summe von Stempeldruck, Schweredruck, und Staudruck in einer idealen, stationär strömenden Flüssigkeit ist konstant.

Die reale Strömung

Reale Flüssigkeiten haben eine Zähigkeit oder Viskosität; sie lassen sich nicht beliebig leicht verformen und leisten deshalb einen Widerstand gegen die Strömung. Dies nennt man auch »innere Reibung«. Der einfachste Fall ist die Bewegung einer Platte der Fläche A parallel zu einer Gefäßwand in einer Flüssigkeit, mit Abstand d zur Wand und konstanter Geschwindigkeit v.

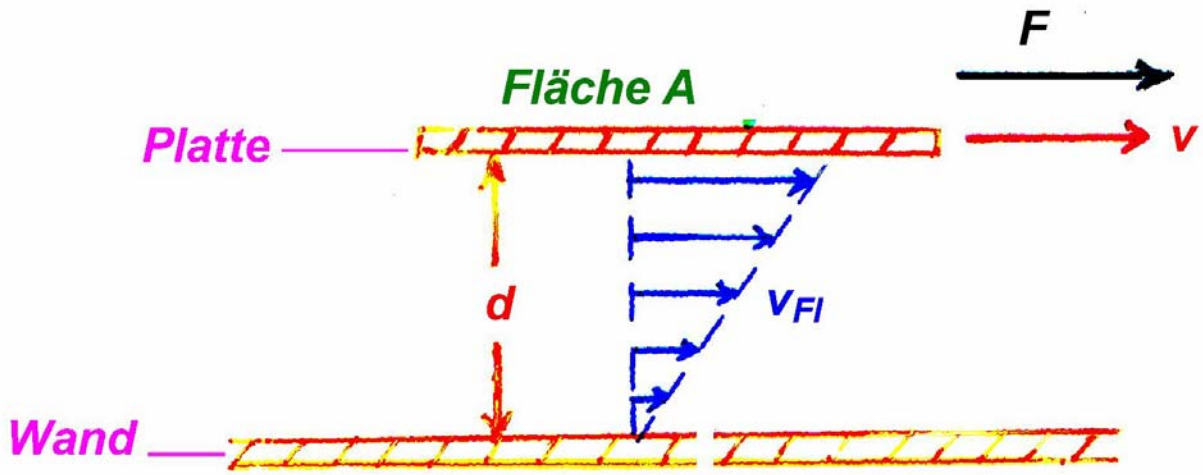


Abbildung 0.30.

Das Geschwindigkeitsprofil ist linear (siehe Abb. 0.30, dort geneigte, gestrichelte Linie), die Flüssigkeit bewegt sich am schnellsten neben der bewegten Platte und am langsamsten neben der Wand. Um die Bewegung aufrecht zu erhalten, muß eine Kraft F auf die Platte in Richtung seiner Geschwindigkeit v

ständig wirken, welche die innere Reibung überwindet:

$$F = \eta\, A\, \frac{v}{d}\,,$$

wobei η eine Materialkonstante der (realen) Flüssigkeit, ihre *Viskosität*, angibt. Die innere Reibung setzt Bewegungsenergie in Wärme um. Die Viskosität von Flüssigkeiten nimmt i. a. mit steigender Temperatur ab (bei Gasen umgekehrt!).

In einem runden Rohr (Radius r, Länge l) ist das Geschwindigkeitsprofil parabelförmig (höchste Geschwindigkeit in der Mitte). Für die Volumenstromstärke gilt das Hagen-Poiseuille'sche Gesetz:

$$I_{\mathrm{V}} = \left(\frac{\pi}{8}\right)\, \left(\frac{r^4}{l}\right)\, \frac{(P_2 - P_1)}{\eta}$$

wobei die Material- und geometrischen Größen zum Strömungswiderstand R_{S} zusammengefaßt werden können:

$$I_{\mathrm{V}} = \frac{\Delta P}{R_{\mathrm{S}}} \qquad \text{mit} \qquad R_{\mathrm{S}} = \left(\frac{8}{\pi}\right)\, \left(\frac{l}{r^4}\right)\, \eta\,.$$

Die erste Gleichung definiert den allgemeinen Strömungswiderstand R_{S} ("Ohm'sches Gesetz" für die Strömng). Eine weitere Anwendung der Viskosität ist das Stokes'sche Gesetz für die Bewegung eines kugelförmigen Körpers (Radius r) innerhalb einer ruhenden Flüssigkeit:

$$F_{\mathrm{S}} = -6\,\pi\,\eta\,r\,v\,.$$

Zusammenfassung, Strömung

Wichtig für die Strömungslehre sind einige Grundbegriffe:

$$\text{Volumenstromstärke} \qquad I_\mathrm{V} = \frac{\Delta V}{\Delta t} \text{ bzw.} \frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t}, \qquad \text{wobei} \qquad I_\mathrm{V} = A\,v\ .$$

($A \mathrel{\widehat{=}}$ Querschnittsfläche der Strömung, $v \mathrel{\widehat{=}}$ Strömungsgeschwindigkeit).

Kontinuitätsgleichung: bei der stationären Strömung ist I_V überall gleich, d. h. $Av = \text{konst.}$ Vergrößerung der Querschnittsfläche erniedrigt die Geschwindigkeit und umgekehrt.

Bernoulli-Gleichung (Energieerhaltung)

$$P + \rho g h + \frac{\rho}{2} v^2 = \text{konst.}$$

Das gilt für eine ideale Strömung; bei realer Strömung ist die Summe von Stempel-, Schwere-und Staudruck zeitabhängig und gegeben durch einen »Reibungsdruck« $P_\mathrm{R}(t)$.

Reale Strömung einer Flüssigkeit der Viskosität η in einem runden Rohr (Hagen-Poiseuille'sches Gesetz):

$$I_\mathrm{V} = \left(\frac{\pi}{8}\right) \left(\frac{r^4}{l}\right) \frac{(P_2 - P_1)}{\eta}$$

oder allgemein: $I_\mathrm{V} = \Delta P / R_\mathrm{S}$ mit $R_\mathrm{S} \mathrel{\widehat{=}}$ Strömungswiderstand.

Der Blutkreislauf

Einige Zahlenwerte zum Blutkreislauf

- Eigenschaften des Bluts: $\rho \approx 1{,}06\ \mathrm{g/cm^3},\ \eta \approx 2{,}1 \cdot 10^{-3}\,\mathrm{Pa \cdot s}$
- Drücke
  - systolischer Druck $\approx 16{,}0$ kPa (Aorta, Herzklappe offen)
  - diastolischer Druck $\approx 10{,}7$ kPa (Aorta, Herzklappe zu)
  - rechter Kammerdruck $\approx 2{,}7$ kPa (Lungenarterie)
- Umsatz Δ V $\approx 70\ \mathrm{cm^3}$/Herzschlag, $I_\mathrm{V} \approx 70\ \mathrm{cm^3/s}$ (Pulsrate ≈ 1 Hz), d. h. $I_\mathrm{V} \approx 7 \cdot 10^{-5}\ \mathrm{m^3/s}$ oder ca. 4,2 l/min.
- (Volumen)arbeit des Herzens $\Delta V\ P \approx 1{,}3$ J/Schlag, Leistung $P_\mathrm{H} \approx 1{,}3$ W
- Tagesarbeit ≈ 130 kJ, entspricht etwa 1,5 % des metabolischen Grundumsatzes (ca. 8 000 kJ pro Tag).

Strömungswiderstand und -geschwindigkeit für den gesamten Kreislauf: aus $\Delta P \approx 13{,}0$ kPa, $I_\mathrm{V} \approx 7 \cdot 10^{-5}\ \mathrm{m^3/s}$ sowie $R_\mathrm{S} = \Delta P / I_\mathrm{V}$ ergibt sich:

$$R_\mathrm{S} \approx 1{,}9 \cdot 10^8\ \frac{\mathrm{Pa \cdot s}}{\mathrm{m^3}}\,.$$

In der Aorta: $R_S = 8\,l\,\eta/\pi r^4$ (HAGEN-POISEUILLE) $\approx 3{,}7 \cdot 10^4 \mathrm{Pa} \cdot \mathrm{s/m^3}$; damit ist

$$\Delta P_{\mathrm{Aorta}} = I_V \cdot R_S \approx 2{,}6 \text{ Pa (sehr klein!)}$$

und

$$v = \frac{I_V}{A} \approx 0{,}13 \ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$$

(Aorta, mit $r = 1{,}3$ cm, $l = 0{,}2$ m).

Blutdruckmessung

Aufgrund des geringen Druckabfalls in der Aorta und anderen großen Arterien ist es zulässig, den Blutdruck in der Armarterie zu messen. Der Manschettendruck (gemessen z.B. mit einem Flüssigkeitsmanometer) wird erhöht, bis keine Strömungsgeräusche in der Armbeuge zu hören sind (Manschettendruck gleich systolischer Druck, Arterie zusammengepreßt). Langsames Senken des Manschettendrucks führt zu hörbaren Stoßgeräuschen (Herzschläge), die beim Erreichen des diastolischen Drucks in kontinuierliche Geräusche übergehen. Typische Werte: 16,0/10,7 kPa (entspricht 120/80 mm Hg – alte Einheit!)

Schweredruck im Blutkreislauf: aus der Dichte ρ sowie den Höhendifferenzen (typ. Herz-Fuß $\approx 1{,}3$ m, Herz-Kopf $\approx 0{,}4$ m) erhalten wir für den Schweredruck $\rho g h$ beim stehenden Menschen:

$$\begin{aligned} \Delta P \text{ Herz} - \text{Fuss} &\approx 13{,}5 \text{ kPa} \\ \Delta P \text{ Herz} - \text{Kopf} &\approx 4{,}2 \text{ kPa} \end{aligned}$$

d. h. der Gesamtdruck ist etwa

$$\begin{aligned} 13{,}0 + 13{,}5 &= 26{,}5 \text{ kPa} \quad \text{in den Füßen, und} \\ 13{,}0 - 4{,}2 &= 8{,}8 \text{ kPa} \quad \text{im Gehirn .} \end{aligned}$$

Elektrizitätslehre

Die elektrische Ladung

Das Wort »Elektrizität« ist abgeleitet von dem griechischen »elektra« = Bernstein. Es ist nämlich seit dem Altertum bekannt, daß das Reiben von Materialien wie Bernstein, Glas usw. mit einem Tuch oder Fell eine (scheinbar schwache) Kraftwirkung auf leichte Objekte (Papierschnipsel usw.) hervorrufen kann.

Erst im 18. Jh. wurde es klar, das es sich hierbei um eine *Ladungstrennung* handelt. Alle Materie enthält elektrische Ladungen, die man (in geringem Maße) durch Reibung freisetzen kann. Die Ladungen üben aufeinander eine elektrische Kraft aus, die COULOMB-Kraft. Diese hat die gleiche Form wie die Gravitationskraft, ist jedoch viel stärker:

$$F_c = \frac{1}{4\,\pi\,\varepsilon_0}\,\frac{q_1 \cdot q_2}{r^2} \qquad \text{(COULOMB-Gesetz)}$$

wobei q_1 und q_2 die beiden Ladungen und r ihr Abstand sind; die Richtung der Kraft von Ladung 1 auf Ladung 2 liegt entlang ihrer Verbindungslinie:

Im Gegensatz zur Gravitation, wo es nur eine Sorte Schweremasse gibt, existieren zwei Ladungstypen: positive und negative. (Früher unterschied man dementsprechend zwei Sorten der Elektrizität, genannt »Glaselektrizität« (+) und »Harzelektrizität« (-), weil sie durch Reiben der entsprechenden Materialien produziert werden konnten). Gleichnamige Ladungen stoßen sich gegenseitig ab (siehe Abb. 1.7 auf der nächsten Seite), während unterschiedliche Ladungen sich gegenseitig anziehen.

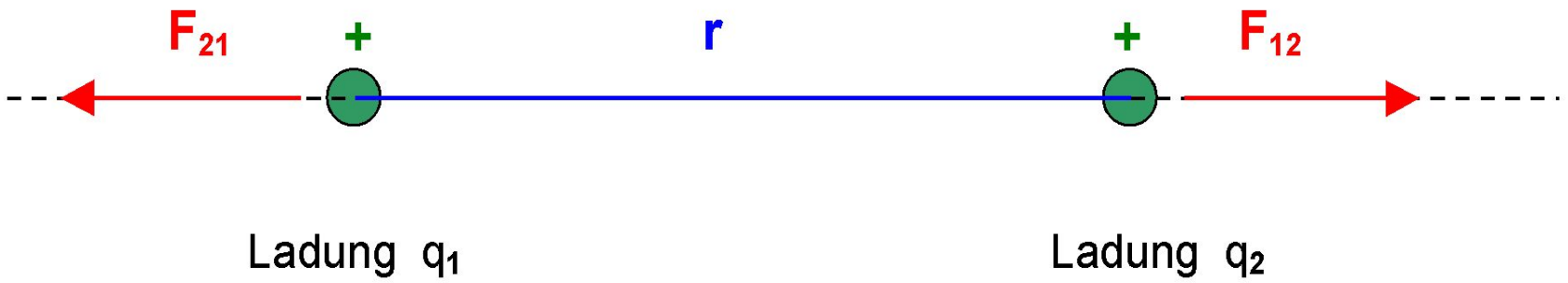


Abbildung 1.7. Coulombkraft

Die Einführung des Begriffs der elektrischen Ladung macht es sinnvoll, eine weitere Basiseinheit zu definieren. Die Einheit der Ladung heißt Coulomb (C) und ist definiert durch das Coulomb-Gesetz zusammen mit der Naturkonstante $1/4\,\pi\,\varepsilon_0$ (der Faktor 4π wird aus geometrischen Gründen verwendet – 4π ist der Raumwinkel um eine Punktladung). Die Konstante hat den Wert

$$8{,}988 \cdot 10^9 \ \frac{\mathrm{Nm}^2}{\mathrm{C}^2}$$

und verbindet die schon definierten mechanischen Größen Kraft (N) und Abstand (m) mit der elektrischen Größe Ladungsmenge (C).

Später wurde die Basiseinheit als die Einheit des elektrischen Stromes I definiert; diese Einheit heißt Ampère und wird gemessen über die magnetische Kraftwirkung zweier Ströme aufeinander. Der elektrische

Strom I ist analog zu anderen Stromgrößen wie dem Volumenstrom I_V oder dem Wärmestrom I_Q definiert:

$$I = \frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t}\,; \qquad I_\mathrm{V} = \frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t}\,; \qquad I_Q = \frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}t}\,.$$

Demnach gilt: 1 C = 1 As; letztere ist die moderne Einheit der elektrischen Ladung. Für die Ladung gilt ein Erhaltungsgesetz (Ladungserhaltung):

Die Summe aller Ladungen in der Welt bleibt konstant.

Man kann zwar Ladungen aus Energie erzeugen oder vernichten, jedoch immer nur paarweise (+/−); die Summe der Ladungen bleibt konstant. Dieses Gesetz hängt mit der Invarianz des elektrischen Potentials unter Verschiebung seines Nullpunktes (»Eichinvarianz«) zusammen. Ladungen können über ihre Kraftwirkung mit einem Elektrometer gemessen werden.

Die elektrische Ladung ist auch *quantisiert*: es gibt eine kleinste Ladung, die *Elementarladung* e_0. Kleinere (freie) Ladungen treten in der Natur nicht auf. Das *Elektron* trägt eine negative Elementarladung, $-e_0$; das Proton, eine positive Elementarladung. Die Elementarladung beträgt $1{,}609 \cdot 10^{-19}$C.

Als Beispiel berechnen wir die Coulomb-Kraft, die die sogenannten *Leitungselektronen*, die sich in einem 1-Ct.-Stück befinden, auf das 1.-Ct.-Stück ausüben. Wir gehen davon aus, dass man die Leitungselektronen herausziehen und in 1 m Entfernung Abstand aufsammeln könnte. Jedes Material enthält Elektronen; in Metallen löst sich ein Teil der Elektronen von den Atomen und bildet ein (fast) freies »Elektronengas«. Die einzelnen Teilchen in diesem »Gas« heißen »Leitungselektronen«, da sie einen elektrischen Strom leiten können. In einem Ct.-Stück aus Kupfer gibt es *ein* Leitungselektron pro Atom; diese können sich fast frei bewegen in dem Metall, können aber nur mit größerem Energieaufwand (»Austrittsarbeit«) das Metallstück verlassen. Wenn wir sie um 1 Meter entfernen könnten, würde die gleiche positive Ladungsmenge

in dem Stück zurückbleiben, wir hätten dann die Anziehungskraft:

$$F_{\mathrm{c}} = \frac{1}{4\,\pi\,\varepsilon_0}\,\frac{q_1 \cdot q_2}{r^2}$$

mit $r = 1\,\mathrm{m}$. Die Ladung q ist gleich 1 Elementarladung/Atom, d. h. $q = N e_0 = \nu\, N_{\mathrm{A}}\, e_0 = (m/M_{\mathrm{A}}) N_{\mathrm{A}}\, e_0$, wo m die Masse des Ct.-Stücks mit N Atomen, M_{A} die molare Masse von Cu, ν die Molzahl und N_{A} die AVOGADRO-Zahl sind. Mit $m = 2\,\mathrm{g}$ und $M_{\mathrm{A}} = 63{,}55\,\mathrm{g/mol}$ erhalten wir

$$q = 3{,}04 \cdot 10^3 \mathrm{C}$$

und damit

$$F_{\mathrm{c}} = 8{,}988 \cdot 10^9\,\frac{\mathrm{N\,m^2}}{\mathrm{C^2}} \cdot \frac{\left(3{,}04 \cdot 10^3\right)^2}{1^2}\,\frac{\mathrm{C^2}}{\mathrm{m^2}} = 8{,}3 \cdot 10^{16}\mathrm{N}\ !!$$

Dies ist die Gewichtskraft von $8{,}5{\cdot}10^{12}$ Tonnen, etwa das Gewicht eines großen Berges der Höhe 3000 m und Basisdurchmesser 50 km! Die Coulomb-Kraft ist tatsächlich sehr stark, sie erscheint schwach im täglichen Leben nur deshalb, weil es nie gelingt, eine größere Ladungsmenge zu trennen oder »freizusetzen«.

Diese Kraft bindet die Elektronen in den Atomen und hält die Materie zusammen; sie bildet die Grundlage für die chemische Bindung.

Mikroskopisch ist es möglich, mit einem Energieaufwand einzelne Ladungen von Atomen oder Molekülen zu trennen oder zurückzugeben; dies nennt sich »Ionisation« bzw. »Rekombination«:

$$A + E_{\mathrm{ion}} \rightarrow A^+ + e^- \qquad \text{und} \qquad A^+ + e^- \rightarrow A + E_{\mathrm{B}}\ (= -E_{\mathrm{ion}})\ .$$

Die Energie E_{B} nennt sich »Bindungsenergie« ; Bindungsenergien sind immer negativ. Bei Molekülen wie AB kann die Ionisation mit einer Aufspaltung der chemischen Bindung einhergehen (»Dissoziation«):

$$AB + E_{\mathrm{dis}} \rightarrow A^+ + B^-\ .$$

Makroskopische Körper, die bewegliche Ladungen enthalten, heißen »elektrische Leiter«. Alle Metalle sind mehr oder weniger gute Leiter. Andere Materialien (Glas, Kunststoffe, ionische Kristalle wie NaCl) sind »Isolatoren« oder »Dielektrika«: sie enthalten nur *gebundene* Ladungen, die nicht beweglich sind und keinen Strom leiten können. Dazwischen liegen die »Halbleiter« wie die Elemente Si, Ge oder die Verbindungen GaAs, CdS, die durch eine geringe Energiezufuhr (Licht, Erwärmung) leitend gemacht werden können. Auch Flüssigkeiten, wenn sie gelöste Ionen enthalten (»Elektrolytlösungen«), sowie ionisierte Gase (»Plasmen«) können einen elektrischen Strom leiten.

Elektrostatik

Die Elektrostatik ist die Untersuchung von nicht-beweglichen Ladungen. Solange man nur mit Paaren von Ladungen zu tun hat, ist die Berechnung der COULOMB-Kraft nach dem COULOMB-Gesetz einfach. Mit vielen Ladungen oder ausgedehnten Ladungsverteilungen wird dies sehr schwierig; dazu führt man den Begriff des elektrischen Feldes E ein. Das elektrische Feld ist eine Vektorgröße, welche die *Kraftwirkung auf eine Probeladung* q_0 zu jedem Punkt im Raum angibt. Die Feldstärke ist definiert als Kraft/Ladung:

$$E(x, y, z) = \frac{F_{\mathrm{c}}(x, y, z)}{q_0} \, .$$

Ihre Einheit ist N/C (oder V/m, s. später). Elektrische Felder addieren sich vektoriell wie Kräfte. Man kann sie »sichtbar« machen, in dem man die Kraftlinien mit einem feinen Pulver nachzeichnet, oder durch Messen mit einem Meßinstrument. Per Konvention beginnen die Feldlinien an positiven Ladungen und enden an negativen; Ladungen sind die Quellen des elektrischen Feldes.

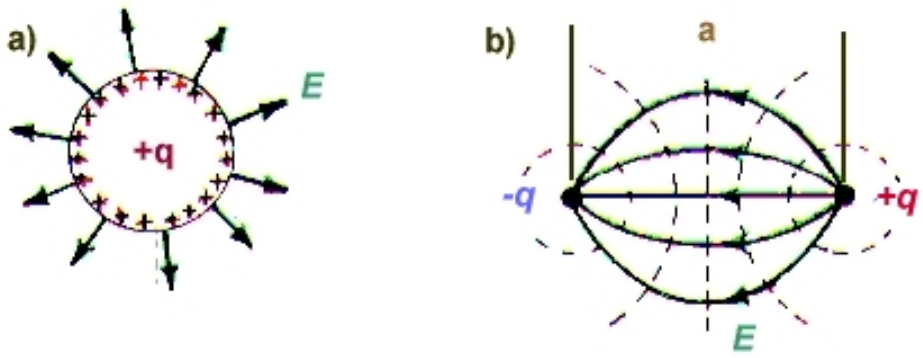


Abbildung 1.8. Elektrische Feldverteilungen: a) ein elektrischer Monopol [punktförmige oder kugelförmige Einzelladung]. Sein elektrisches Feld (Coulombfeld) zeigt radial vom Mittelpunkt nach außen und nimmt wie $1/(\text{Abstand})^2$ ab. b) Der elektrische Dipol [zwei entgegengesetzte Ladungen im festen Abstand a]. Sein Feld ist gekrümmt und zeigt eine Symmetrieebene (gestrichelt).

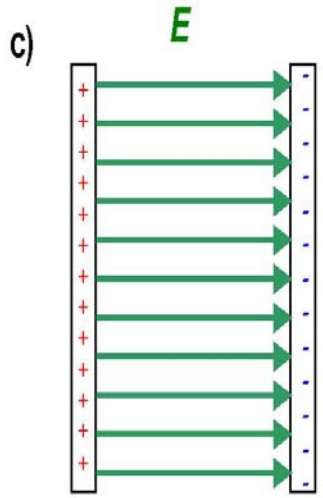


Abbildung 1.9. c) Das homogene Feld zwischen den Platten eines geladenen Plattenkondensators; es hat überall die gleiche Stärke und Richtung.

Das elektrische Potential

Wir gehen nun genauso wie in der Mechanik vor: nachdem wir die elektrische Kraft diskutiert und durch eine Feldgröße beschrieben haben (elektrisches Feld E), betrachten wir nun die Prozeßgröße Arbeit sowie die Zustandsgröße Energie. Eine Probeladung q_0 im Feld E erfährt eine Kraft; Bewegung der Ladung gegen diese Kraft benötigt die Verrichtung von Arbeit, während umgekehrt, die Ladung Arbeit verrichten kann, wenn sie sich in Feldrichtung bewegt. Wir schreiben

$$\Delta W = \int \boldsymbol{F} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r} = \int q_0 \, \boldsymbol{E} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r} \qquad \text{oder} \qquad \frac{\Delta W}{q_0} = \int \boldsymbol{E} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r} \; .$$

Dieses Integral hat z. B. für das Feld einer Punktladung q_1 eine einfache Form:

$$E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q_1}{r^2} \frac{\boldsymbol{r}}{r} \qquad \text{(Coulomb-Feld)} \; ,$$

und

$$\frac{\Delta W}{q_0} = \int \boldsymbol{E} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} q_1 \int \frac{\mathrm{d}r}{r^2} = -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q_1}{r} \; .$$

Die Arbeit/Ladung $\Delta W/q_0$ ist ein Maß für die Arbeit, die verrichtet werden müßte, wenn wir die Ladung q_0 zu einer gleichnamigen Ladung q_1 hinbewegen. Sie heißt »COULOMB-Potential« der Punktladung q_1.

Die potentielle Energie E_{pot} ändert sich natürlich auch dabei; wir können die Größe E_{pot}/q_0 ebenfalls betrachten. Die Arbeit bzw. die Energie einer Ladung, geteilt durch die Ladungsmenge, nennt man allgemein das elektrische *Potential* φ. Sie läßt sich aus der Feldstärke E durch Integration über eine Strecke errechnen:

$$\Delta\varphi = -\int \boldsymbol{E} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r} \; .$$

Man kann das elektrische Potential direkt messen, mit einem Voltmeter, welches eine kleine Ladung fließen läßt und die resultierende Arbeit anzeigt.

Eine elektrische »Potentiallandschaft« gleicht einer Höhenlandschaft in der Mechanik (siehe Abb. 1.10 auf der folgenden Seite): eine Probemasse in der Höhenlandschaft besitzt eine bestimmte potentielle Energie E_{pot}, je nach Höhe. Sie erfährt eine Kraft, die sie nach unten rollen läßt, je nach Steigung des Bodens. Die Höhenkontourlinien sind Linien gleicher Höhe, ihre Dichte zeigt die jeweilige Steigung an.

Ebenfalls kann man »Kontourlinien« des elektrischen Potentials definieren, sie heißen »Äquipotentiallinien« (bzw. -Flächen). Auf einer Äquipotentiallinie ist die potentielle Energie einer Ladung konstant, sie bewegt sich ohne Arbeitsaufwand.

Die Kraftlinien (d. h. das elektrische Feld E) zeigen immer senkrecht zu den Äquipotentiallinien, d.h. in die Richtung, in der die »Steigung« am größten ist (und die Arbeit deshalb auch maximal).

Wir können die obige Beziehung zwischen Potential und Feld umkehren, um das Feld aus dem Potential zu berechnen:

$$E(r) = -\frac{d}{\mathrm{d}r}[\varphi(r)]$$

(eindimensional; z. B. beim Feld einer Punktladung oder homogenes Feld in Richtung $\boldsymbol{r}$) bzw. (dreidimensional):

$$E(r) = -\nabla\varphi(\boldsymbol{r})\,.$$

(∇ ist die Abkürzung für eine dreidimensionale Ableitung, die als Vektor in die Richtung maximaler Steigung zeigt.) Man nennt dies »Gradientenbildung« und schreibt auch

$$E(r) = -\mathrm{grad}\,[\varphi(\boldsymbol{r})]\,.$$

Wie auch die potentielle Energie, hat das elektrische Potential keinen festgelegten Nullpunkt. Die Erdoberfläche bildet eine Äquipotentialfläche mit einer fast unerschöpflichen Ladungsreserve, daher verbindet

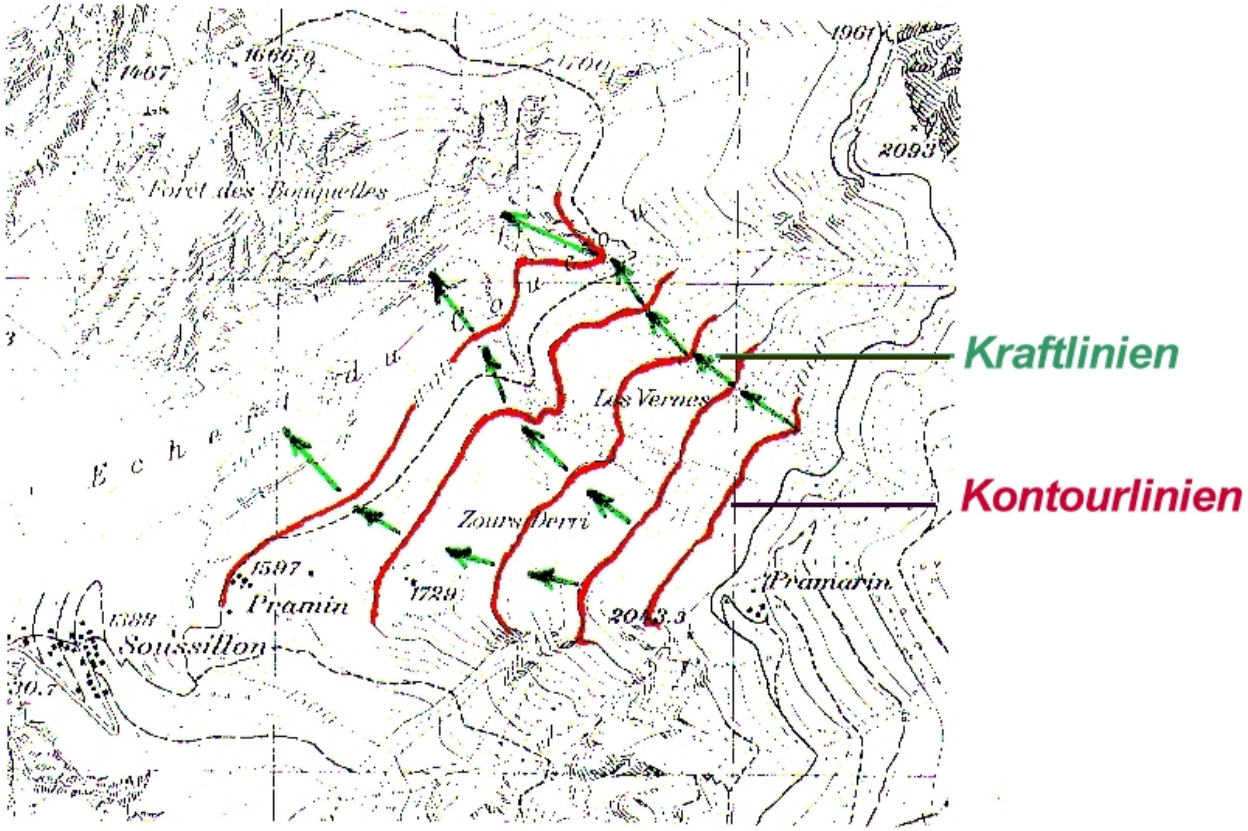


Abbildung 1.10. Auszug aus einer Höhenkontour-Karte. Die Höhenkontourlinien verbinden Punkte der gleichen Höhe h; darauf bewegt sich eine Masse m ohne (Hub-) Arbeit, ihre potentielle Energie mgh bleibt konstant. Linien der maximalen Steigung zeigen senkrecht zu den Höhenkontouren, eine Masse würde entlang solcher Linien hinunterrollen. Die Hangabtriebskraft zeigt entlang der maximalen Steigung und wächst mit wachsender Steigung (d. h. wenn die Höhenkontouren dichter zusammenliegen). Die Äquipotentiallinien verhalten sich analog zu den Höhenkontourlinien, die elektrische Feldvektoren analog zu der Hangabtriebskraft.

man oft einen Punkt in einem elektrischen Kreis mit der Erde (»Masse« oder »Erdung«) und benutzt diesen Punkt als Potential-Nullpunkt. Im Vakuum kann man als Nullpunkt das Potential bei $r \to \infty$ nehmen (Atomphysik).

Für Messungen und Anwendungen ist immer nur die Potential*differenz* $\Delta\varphi$ wichtig; diese nennt man die »elektrische Spannung« U. Die Einheit von Potential und Spannung ist [Energie]/[Ladung], d. h. J/C oder J/As; sie heißt (als abgeleitete Einheit) auch »Volt« (nach ALESSANDRO **V**OLTA):

$$1\ \mathrm{V} = 1\ \frac{\mathrm{J}}{\mathrm{C}} = 1\ \frac{\mathrm{J}}{\mathrm{As}} \qquad \text{bzw.} \qquad 1\ \mathrm{J} = 1\ \mathrm{VAs}\ .$$

Elektrische Leistung (Arbeit/Zeit) mißt man daher in $\mathrm{W} = \mathrm{J/s} = \mathrm{VA}$.

Der Plattenkondensator

Ein gutes und relativ einfaches Beispiel für Feld und Potentiallinien liefert der Plattenkondensator, der außerdem bei Anwendungen (Elektronik) und für Messungen (Dielektrizitätskonstanten) wichtig ist. Wir haben bereits gesehen, daß das elektrische Feld zwischen zwei parallelen, geladenen Platten homogen (konstante Stärke und Richtung) und durch die Flächenladungsdichte auf den Platten gegeben ist:

$$E = \frac{1}{\varepsilon_0}\ \frac{q}{A}\ .$$

Der Kondensator dient als »Ladungsspeicher«, genauso wie ein heißer Körper Wärme speichert. Analog zur Wärmekapazität definiert man daher die elektrische Kapazität C:

$$C = \frac{\text{Ladung}}{\text{Potentialdifferenz}} = \frac{q}{U} \qquad \text{bzw.} \qquad \frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}U}$$

(Einheit $\widehat{=}$ C/V oder As/V $\equiv$ Farad (F) [nach MICHAEL FARADAY]). Die Potentialdifferenz U zwischen den Platten (Ladespannung) ist gegeben wie oben durch ein Integral entlang des (konstanten) Feldes, d. h.

$$U = \int \boldsymbol{E} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r} = E\,d = \frac{1}{\varepsilon_0}\,q\,\frac{d}{A}$$

(wo d der Plattenabstand, A die Plattenfläche und q die gespeicherte Ladung sind); damit ist die Kapazität $C = q/U$ gegeben durch

$$C = \varepsilon_0\,\frac{A}{d}\,.$$

Es ist egal, ob eine Platte geerdet ist (entgegengesetzte Ladung fließt von der Erde nach), oder beide Platten isoliert und entgegengesetzt geladen sind.

Bringen wir einen Isolator (Dielektrikum) zwischen die Platten, so werden atomare oder molekulare Dipole erzeugt bzw. ausgerichtet im elektrischen Feld. Dies führt zu einem Gegenfeld, das gesamte Feld (und daher die Spannung) wird abgeschwächt; so steigt die Kapazität des Kondensators. Das Verhältnis der Kapazitäten mit Dielektrikum und ohne Dielektrikum ist eine Materialkonstante des Dielektrikums, die »relative Dielektrizitätskonstante« ε_r. Für den Kondensator mit Dielektrikum schreibt man daher:

$$C = \varepsilon_\mathrm{r}\,\varepsilon_0\,\frac{A}{d}\,.$$

Die im Kondensator gespeicherte Ladung hat eine hohe potentielle Energie (man sagt auch, das elektrische Feld E speichert Energie). Diese kann man aus der Potentialdifferenz sowie der Ladung errechnen:

$$\mathrm{d}W = U\,\mathrm{d}q = U\,C\,\mathrm{d}U \qquad \text{und} \qquad E_\mathrm{pot} = \Delta W = \int CU\,\mathrm{d}U = \frac{CU^2}{2}$$

[Energie im Kondensator! (Einheit $\mathrm{FV}^2 = (\mathrm{As/V})\mathrm{V}^2 = \mathrm{VAs} \equiv \mathrm{J}$).]

Membranspannungen

Nernst'sche Gleichung Die Abbildung 1.11 auf der nächsten Seite zeigt eine Zellenmembran (grün schraffiert); im Teilbild a) links ist die Konzentration eines Salzes (KCl) innerhalb der Zelle größer als die außerhalb der Zelle ($c[\mathrm{KCl}]_{\mathrm{innen}} > c[\mathrm{KCl}]_{\mathrm{aussen}}$). Außerdem soll die Membran eine höhere Durchlässigkeit für K^+-Kationen als für Cl^--Anionen besitzen (»Ionenkanäle«).

Aufgrund des chemischen Gradienten (Konzentrationsgradienten) diffundiert KCl von innen nach außen (schneller mit steigender Temperatur T; Pfeile im Bild). Dies führt zu einem Überschuß an Cl^--Anionen innerhalb der Zelle und an K^+-Kationen außerhalb der Zelle – vgl. Teilbild b) rechts: ein elektrisches Feld E zeigt von außen nach innen, eine entsprechende elektrische Spannung U (Ruhepotential) entsteht zwischen innen und außen. Um nun weitere Ionen durch die Membran zu transportieren, müßte eine Arbeit $\Delta W = z\, e_0\, U$ geleistet werden (z = Wertigkeit der Ionen, e_0 = Elementarladung). Diese Arbeit kommt aus der thermischen Energie $k_{\mathrm{B}}T$ der diffundierenden Ionen; die Diffusion setzt sich solange fort, bis sich ein Gleichgewicht etabliert hat (thermisches oder BOLTZMANN-Gleichgewicht). Die Gleichgewichtsbedingung lautet:

$$\frac{c_{\mathrm{a}}}{c_{\mathrm{i}}} = e^{-z\, e_0 U / k_{\mathrm{B}}\, T} \tag{1.8}$$

[vgl. barometrische Höhenformel; auch ein thermisches Gleichgewicht zwischen einem Diffusionsstrom (Luftmoleküle nach oben) und einem Sinkstrom (Hubarbeit mgh)]. Umgestellt ergibt (1.8) die Nernst'sche Gleichung:

$$k_{\mathrm{B}}T \ln\left[\frac{c_{\mathrm{a}}}{c_{\mathrm{i}}}\right] = -z\, e_0\, U \ ,$$

welche die Ionenkonzentrationen innen und außen mit der Membranspannung U verbindet. Nervenimpulse entstehen durch zusätzliche aktive Ionenflüsse (bewirkt durch Ionenpumpen in der Membran), die zu einer

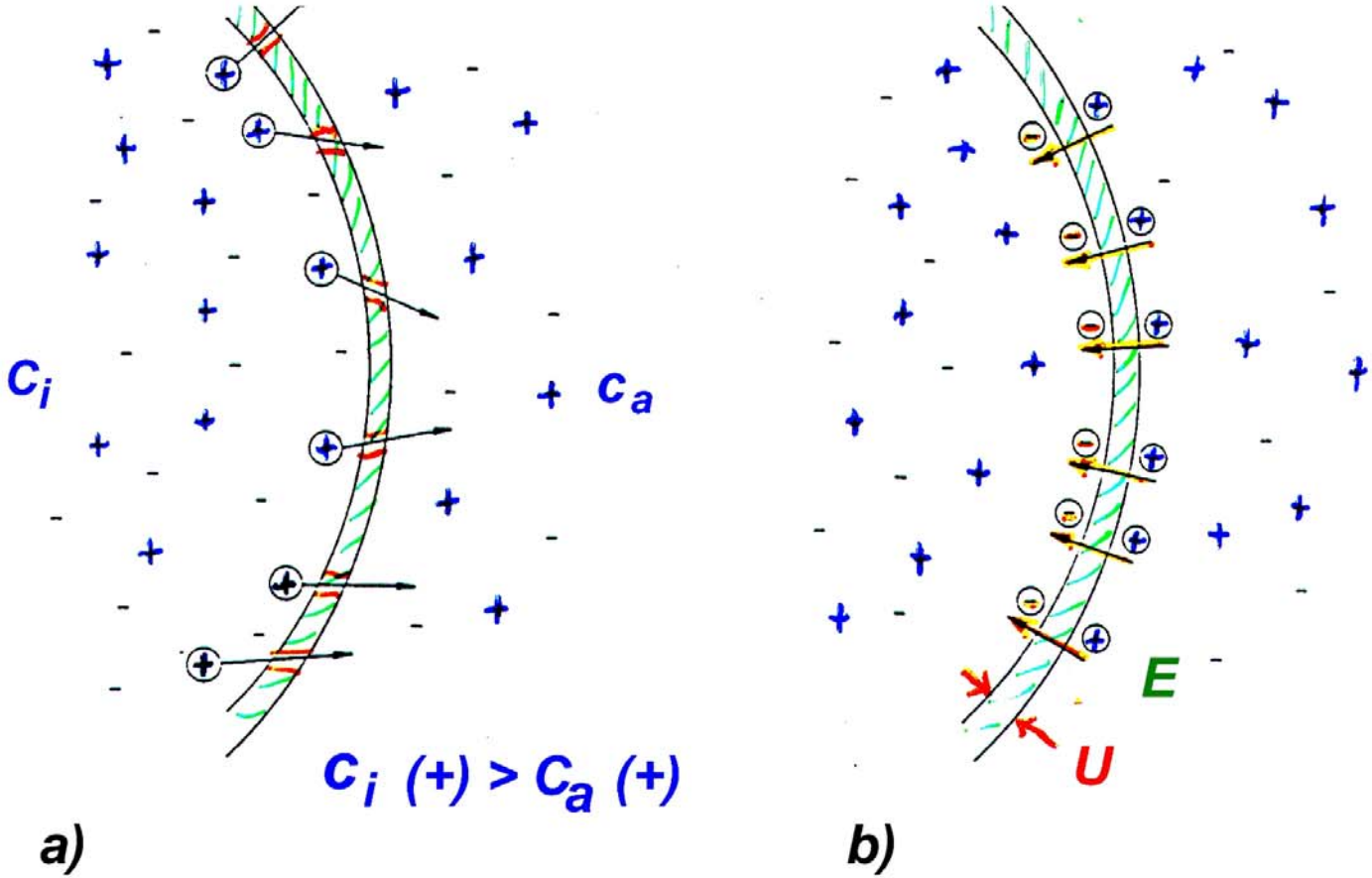


Abbildung 1.11.

kurzfristigen Änderung des Membranpotentials führen.

Materie im elektrischen Feld

Die Materie kann – elektrisch gesehen – grob in zwei Klassen geteilt werden: *leitende Materie* (Metalle, Plasmen, Elektrolytlösungen ...) und *isolierende Materie* (alle anderen Materialien).

1. *Leitende Materie* enthält eine große Anzahl an (fast) frei beweglichen Ladungen – die *freien* Ladungen

2. *Isolatoren* enthalten *gebundene* Ladungen, die an den Atomen oder Molekülen der Materie festsitzen, jedoch immer noch mikroskopisch verschoben werden können. Sie bilden dabei Dipole, mit Dipolmomenten $\boldsymbol{p} = q\,\boldsymbol{a}$, wobei q die verschobene Ladungsmenge und a die Verschiebungsstrecke sind (der Vektor $\boldsymbol{a}$ zeigt von dem negativen Ende zum positiven hin)

Wirkt ein elektrostatisches Feld $|E_0| = |D_0|/\varepsilon_0 = \sigma_0/\varepsilon_0$ (σ_0 = freie Flächenladungsdichte) auf einen Isolator, so wird es nicht im Inneren der Materie vollständig abgeschirmt wie beim Leiter; es wirkt auf die dort vorhandenen (gebundenen) Ladungen und produziert ausgerichtete Dipolmomente (durch Ladungsverschiebung bzw. Orientierung vorhandener Dipole). Diese heben sich innerhalb der Materie gegenseitig auf, lassen aber eine Polarisationsflächenladungsdichte σ_P auf den Oberflächen der Materie übrig. Man definiert die Polarisation der Materie als Gesamtdipolmoment pro Volumen:

$$|P| = \frac{\sum p_\mathrm{i}}{V} = \frac{q_\mathrm{P} L}{V} = \frac{\sigma_\mathrm{P} A L}{V} = \sigma_\mathrm{P}$$

analog zum Verschiebungsfeld D; A ist die Fläche der Materie, L ihre Dicke.

Es existieren nun drei Felder:

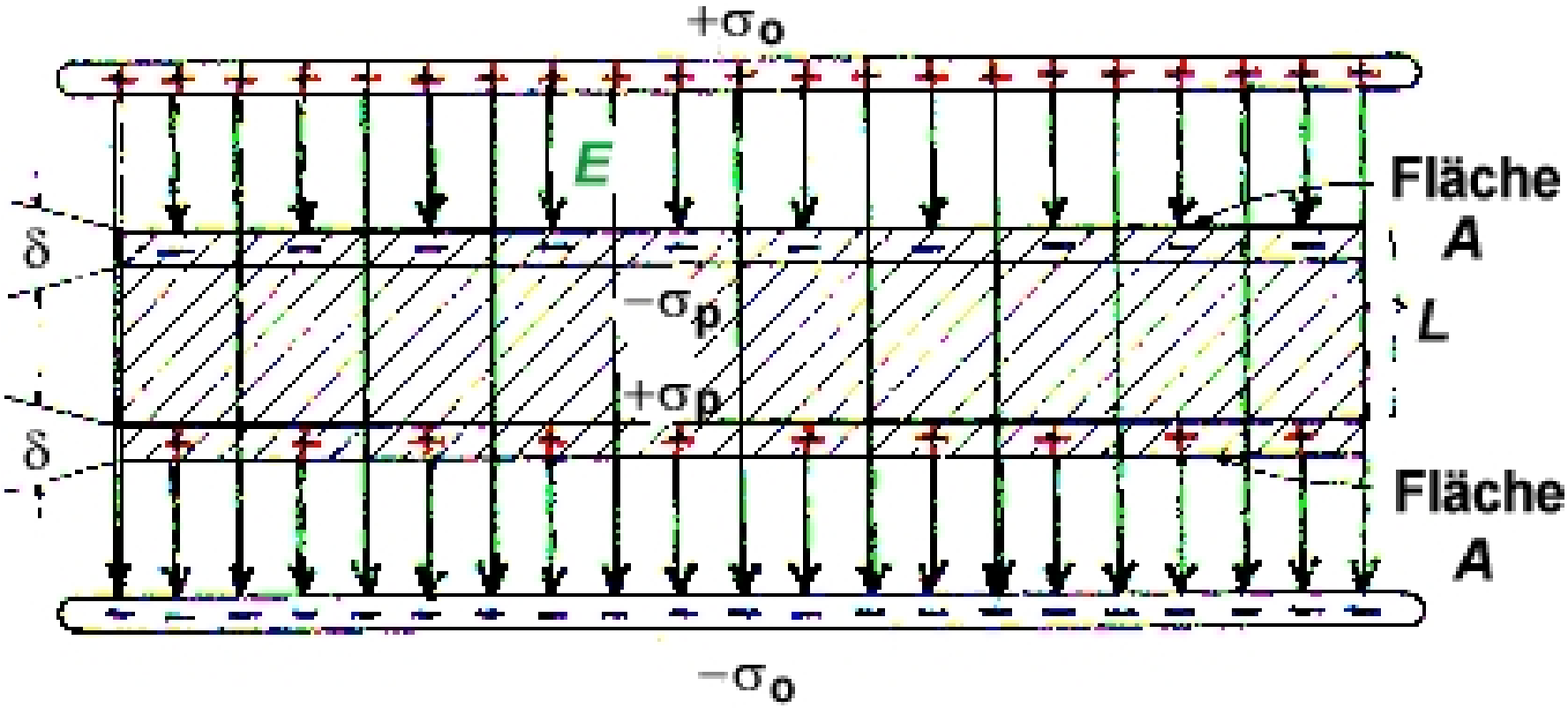


Abbildung 1.12. Ein Plattenkondensator mit einem Dielektrikum (Scheibe aus isolierender Materie) der Fläche A und der Dicke L zwischen den Platten. Auf den Platten befindet sich die freie Flächenladungsdichte σ_0, die das elektrische Feld E_0 erzeugt. Dieses Feld produziert eine Polarisation der Materie (ausgerichtete Dipole innerhalb der Materie), die ihererseits zu einer Oberflächenladungsdichte σ_{P} an den Oberflächen des Dielektrikums (innerhalb einer dünnen Schicht der Dicke δ) führt. Das Feld E wird innerhalb der Materie abgeschwächt, die Kapazität des Kondensators entsprechend erhöht.

1. P nur innerhalb der Materie, mit $|P| = \sigma_{\mathrm{P}}$;

2. D überall gleich, mit $|D| = \sigma_0$;

3. $E = E_0$ außerhalb der Materie, $E = E_\mathrm{m} < E_0$ (Normalfall) innerhalb der Materie

[E macht einen Sprung an der Oberfläche der Materie in der einfachen Geometrie eines Plattenkondensators mit einer Materiescheibe (Dielektrikum) zwischen den Platten.]

Im Allgemeinen gilt

$$E = \frac{(D_0 - P)}{\varepsilon_0} = \frac{D_\mathrm{m}}{\varepsilon_0} \; .$$

Eine alternative Beschreibung dieses Vorgangs basiert auf die Reduktion der E-Feldstärke in der Materie:

$$\frac{E_0}{E_\mathrm{m}} = \varepsilon_\mathrm{r} \quad \text{(eine dimensionslose Zahl, } \textit{relative Dielektrizitätszahl}\text{)} \; .$$

Die Kapazität eines Kondensators, welcher Materie der relativen Dielektrizitätszahl ε_r enthält, ist gebgeben (entsprechend der Reduktion der Feldstärke E) durch:

$$C_\mathrm{m} = \varepsilon_\mathrm{r} \, C_0 = \varepsilon_0 \, \varepsilon_\mathrm{r} \frac{A}{d} = \varepsilon \frac{A}{d} \; .$$

(die letzten beiden Formeln gelten für einen Plattenkondensator mit Plattenfläche A, Plattenabstand d, Füllfaktor für die Materie = 100%, d. h. $L = d$.)

Wir unterscheiden vier Typen der Materie:

1. Dielektrika, mit $\varepsilon_\mathrm{r} > 1$ schwächen das elektrische Feld E;

2. Ferroelektrika besitzen ein spontanes elektrisches Feld E unterhalb ihrer 'kritischen Temperatur' T_C;

3. Paraelektrika, mit $\varepsilon_\mathrm{r} \gg 1$, sind Ferroelektrika bei $T > T_C$;

4. sowie Leiter, mit $\varepsilon_\mathrm{r} \to \infty$; sie schirmen das Feld E vollständig ab.

Bei der Verschiebungspolarisation ist P proportional E: $P = n\,\alpha\,E$, n = Teilchendichte der polarisierbaren Teilchen; hier ist P relativ schwach, kann aber dem Feld E sehr schnell folgen. Bei der Orientierungspolarisation ist P eine Funktion von E und T, sie ist meistens viel stärker, aber folgt dem Feld E nur langsam.

Der elektrische Strom

Bisher haben wir statische Ladungen betrachtet, die als freie oder Überschußladungen an einer festen Stelle sitzen; dabei haben wir gesehen, daß es aufgrund der starken Coulomb-Kräfte sehr schwierig ist, eine größere Ladungsmenge zu trennen und als freie Ladung zu erhalten.

Der für allerlei Anwendungen weitaus wichtigere Fall ist jedoch der der bewegten Ladungen, d. h. des elektrischen Stroms. In einem nach Außen elektrisch neutralen Leiter lassen sich relativ große Ladungsmengen in Bewegung setzen; die Bewegung wird durch den elektrischen Strom $I = q/t$ bzw. $\mathrm{d}\,q/\mathrm{d}\,t$ beschrieben, in exakter Analogie zu einer Flüssigkeitsströmung.

Ein elektrischer Leiter kann irgendein Material sein, welches bewegliche Ladungen enthält. Diese sind die Elektronen in Metallen und Halbleitern, die Ionen in Elektrolytlösungen und festen Ionenleitern, und Elektronen plus Ionen in geladenen Gasen (Plasmen).

Wieder in Analogie zur Flüssigkeitsströmung, beobachtet man beim elektrischen Strom immer einen Widerstand; ein Teil der Bewegungsenergie der Ladungen wird in eine ungeordnete Atombewegung umgesetzt, d. h. in Wärme. Dieser elektrischer Widerstand R hängt von der Geometrie und von Materialeigenschaften des Leiters ab. [n.b.: wie auch bei der Flüssigkeitsströmung, hat die Natur *bei tiefen Temperaturen* eine Ausnahme geschaffen. Dort gibt es den *supraflüssigen* Zustand (beim flüssigen Helium), wo eine Strömung ohne Widerstand, d. h. eine ideale Strömung, möglich ist.

Auch eine Reihe von Metallen, Legierungen und Verbindungen zeigt bei tiefen Temperaturen ein *Verschwinden des elektrischen Widerstandes*, genannt Supraleitung.]

Analogie: elektrischer Strom, Flüssigkeitsströmung

Als Beispiel für den elektrischen Strom/Flüssigkeitsströmung vergleichen wir das Auslaufen eines Behälters durch einen Strömungswiderstand R_S mit der Entladung eines Kondensators durch einen elektrischen Widerstand R (RCKreis). In beiden Fällen haben wir einen nicht-stationären Strom: die Stromstärke I_V bzw. I nimmt mit der Zeit ab, weil die »treibende Kraft« (Druckdifferenz Δp bzw. elektrische Spannung U) abnimmt, je weiter sich der »Speicher« ausleert (siehe Abb. 1.13 auf der folgenden Seite).

In beiden Fällen gilt das gleiche Gesetz:

$$I_\mathrm{V} = \frac{\Delta p}{R_\mathrm{S}} \qquad \text{und} \qquad I = \frac{U}{R}\,.$$

Letzteres wird »Ohm'sches Gesetz« in der Elektrizitätslehre genannt; ein Widerstand, der unabhängig von Stromstärke und Spannung ist, heißt »ohm'scher Widerstand«.

Wir können in beiden Fällen die Beziehung zwischen der »gespeicherten Menge« (Volumen der Flüssigkeit, Ladungsmenge) und der »treibenden Kraft« (Druckdifferenz, elektrischer Spannung) einsetzen:

$$\Delta p = \rho g h = \rho g \frac{V}{A} \qquad \text{und} \qquad U = \frac{q}{C} = \frac{qd}{\varepsilon_0 A}\,.$$

Die Größen sind in beiden Fällen einander proportional, die Proportionalitätskonstante enthält geometrische Größen und Materialkonstanten:

$$\frac{\rho g}{A}\,, \qquad \frac{d}{\varepsilon_0 A}\,.$$

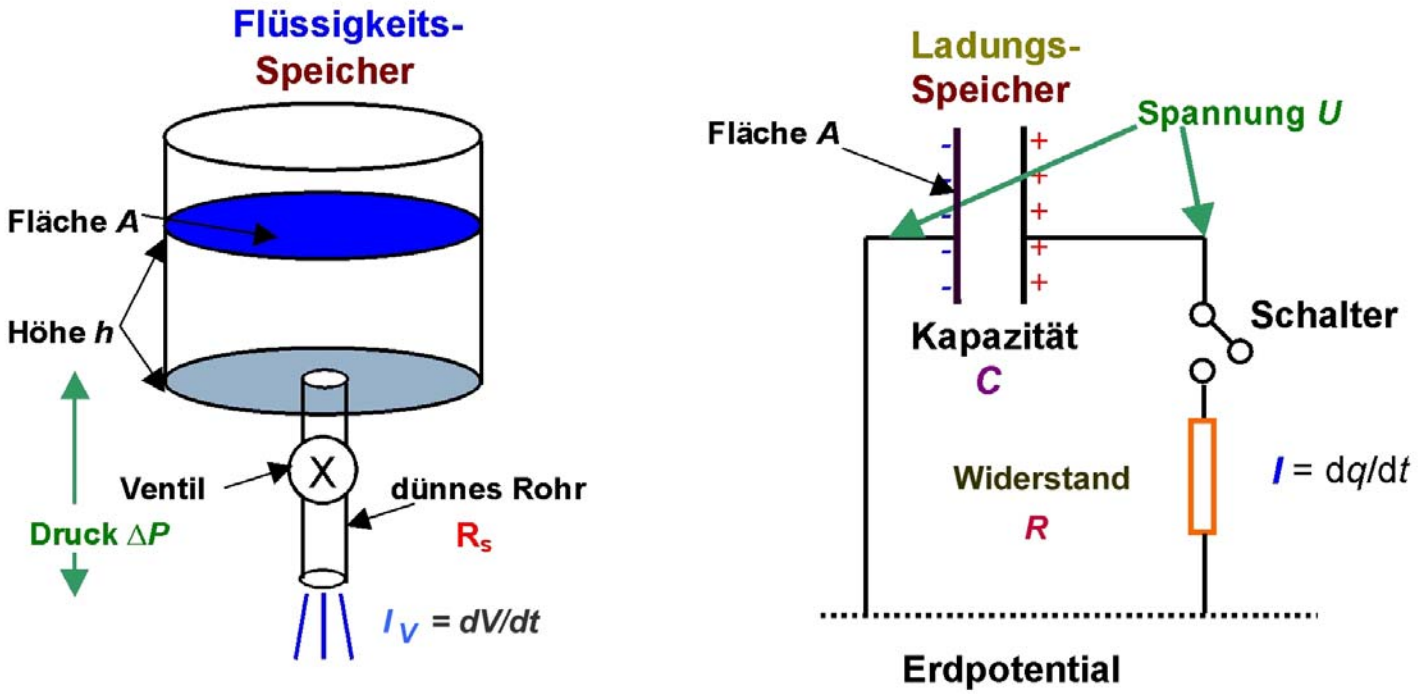


Abbildung 1.13.

Einsetzen in die Gleichung für die Stromstärke ergibt

$$I_{\mathrm{V}} = \frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t} = -\frac{\frac{\rho g}{A}}{R_{\mathrm{S}}} V$$

und

$$I = \frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t} = -\frac{1}{RC} q$$

(das Minuszeichen resultiert daraus, daß das gespeicherte Volumen bzw. die Ladung mit der Zeit ab-

nimmt.) Umstellen dieser Gleichungen liefert:

$$\frac{\mathrm{d}V}{V} = -\frac{\rho g}{A R_\mathrm{S}}\,\mathrm{d}t \qquad \text{und} \qquad \frac{\mathrm{d}q}{q} = -\frac{1}{RC}\,\mathrm{d}t\;.$$

Integration dieser Differentialgleichungen ergibt als Lösungen eine Exponentialfunktion der Zeit:

$$V(t) = V(0)\cdot e^{-t/\tau_\mathrm{s}} \qquad \text{und} \qquad q(t) = q(0)\cdot e^{-t/\tau}$$

mit den Zeitkonstanten $\tau_\mathrm{s} = R_\mathrm{S} A/\rho g$ bzw. $\tau = RC$.

Einheiten: den elektrischen Strom mißt man in Einheiten C/s $\equiv$ As/s = A (Ampère), die Spannung in Einheiten J/As $\equiv$ V (Volt), den Widerstand in Einheiten V/A $\equiv$ Ohm (abgekürzt Ω). Man definiert auch die elektrische Leitfähigkeit L als Kehrwert des Widerstandes R:

$$L = \frac{1}{R}$$

mit der Einheit $1/\Omega$ (= Siemens, 1 S $\;\widehat{=}\;$ 1 Ω^{-1}).

elektrische Stromkreise

- Kirchhoff'sche »Maschenregel«:

$$\sum_{\text{i um Kreis}} U_\mathrm{i} = 0 \qquad \text{(Energieerhaltung)}$$

  wobei

  - Spannungen in Stromrichtung positiv,

  - Spannungen in Gegenstromrichtung negativ und
  - Spannungen von Stromquellen negativ zu nehmen sind.

- Kirchhoff'sche »Knotenregel«:

$$\sum_{\text{i am Punkt}} I_\text{i} = 0 \qquad \text{(Ladungserhaltung)}$$

  wobei

  - Ströme zum Punkt hinein negativ,
  - Ströme vom Punkt hinaus positiv zu nehmen sind.

Anwendungen: Parallel- und Reihenschaltungen

- Bei der Reihenschaltung gilt:

$$U_0 = U_1 + U_2 \qquad \text{(Maschenregel)}$$

  und

$$I_0 = I_1 = I_2 \qquad \text{(Knotenregel) ;}$$

  d. h.: spannungsproportionale Größen (R, L, U_Quelle) addieren sich einfach; aber strom- oder ladungsproportionale Größen (C) addieren sich reziprok.

  (Beispiele: der Gesamtwiderstand von drei 100 Ω-Widerständen, die in Reihe geschaltet sind, beträgt $R_\text{ges} = R_1 + R_2 + R_3 = 100 + 100 + 100 = 300\,\Omega$; die Kapazität von zwei 10 μF-Kondensatoren in Reihe beträgt $C_\text{ges} = 1/[1/C_1 + 1/C_2]$, $C_\text{ges} = 1/[1/10\ \mu\text{F} + 1/10\ \mu\text{F}] = 5\ \mu\text{F}$.)

- Bei der Parallelschaltung gilt:

$$U_0 = U_1 = U_2 \qquad \text{(Maschenregel)}$$

und

$$I_0 = I_1 + I_2 \qquad \text{(Knotenregel)} \ ;$$

d. h. spannungsproportionale Größen (R, L) addieren sich reziprok; aber strom- oder ladungsproportionale Größen (C, I_{Quelle}) addieren sich einfach.

(Beispiele: der Gesamtwiderstand von zwei $150\,\Omega$-Widerständen, die Parallel geschaltet sind, beträgt $R_{\text{ges}} = 1/[1/R_1 + 1/R_2], R_{\text{ges}} = 1/[1/150 + 1/150] = 75\,\Omega$; die Kapazität von zwei 20 μF-Kondensatoren in Parallel beträgt $C_{\text{ges}} = C_1 + C_2 = 20\ \mu\text{F} + 20\ \mu\text{F} = 40\ \mu\text{F}$.)

Innenwiderstand Jede Stromquelle und jedes Meßinstrument besitzt einen Innenwiderstand. Man versucht, ihn bei Stromquellen, wie auch bei Ampèremetern (die in Reihe geschaltet werden), möglichst klein zu halten.

Bei Spannungsquellen, sowie bei Voltmetern (die parallel geschaltet werden) soll er möglichst groß werden, um Meßfehler zu vermindern.

Wirkungen des elektrischen Stromes

Ein elektrischer Strom hat drei Wirkungen; zwei davon in Verbindung mit der Materie, in der er fließt, die dritte auch im Vakuum:

- Wärmeproduktion (»Joule'sche Wärme«) aufgrund des elektrischen Widerstandes des Leiters;

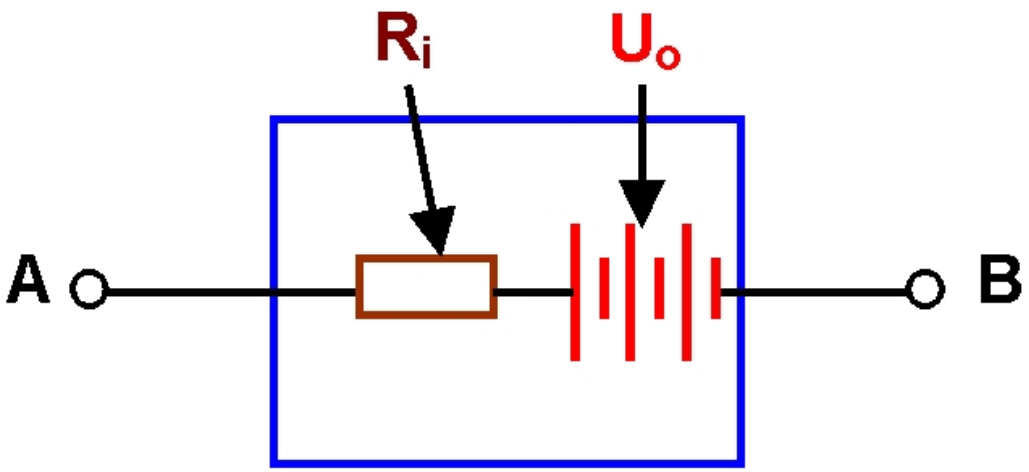


Abbildung 1.14. Schematische Darstellung des Innenwiderstandes: das »Gerät« (blaues Kästchen) enthält eine Spannungsquelle der Ausgangsspannung U_0 und einen Widerstand R_i (den Innenwiderstand). An den externen Klemmen A und B mißt man in »Leerlauf« (wenn kein Strom fließt) die volle Spannung U_0; fließt ein Strom I nach außen, so vermindert sich die Klemmspannung um den Betrag IR_i (die Spannung, die am Innenwiderstand R_i abfällt, wenn der Strom I durch ihn fließt).

- eine chemische Wirkung (Oxidation, Reduktion) aufgrund der Ladungsübertragung an Ionen (Elektrolyse, Galvanisieren, Photosynthese);
- die Erzeugung eines Magnetfeldes um einen stromdurchflossenen Leiter oder Stromfaden, auch im Vakuum.

Die Wärmeproduktion haben wir bereits erwähnt; sie ist gegeben durch die Stromstärke I, die durch einen Widerstand R fließt, mal Spannungsabfall U am Widerstand (Ladung · Potentialdifferenz/Zeit =

Arbeit/Zeit → Wärme/Zeit):

$$\text{elektrische Leistung} = IU = \frac{U^2}{R} = I^2 R \rightarrow \frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}t}$$

(Einheit VA = J/s ≡ W, Wärmeproduktion).

Die elektrochemische Wirkung ist äußerst wichtig für die Technik (Chemie, Bau von Batterien und Akkus, Galvanik) aber auch für die Biochemie und Biophysik sowie die Physiologie (Gleichgewicht in Elektrolytlösungen, Membranspannungen, Leitung von Nervenimpulsen, Photosynthese, Sinnesorgane ...)

Die Beziehung zwischen Strom und Magnetfeldern wurde von H.C. OERSTED im Jahre 1811 entdeckt. Sie basiert letztlich auf einem relativistischen Effekt: die Ladungsdichte einer *bewegten* Ladungsverteilung ändert such relativ zu der einer ruhenden Ladungsverteilung und hängt auch davon ab, ob der Beobachter sich bewegt. Dies bewirkt eine kleine Zusatzkraft zur üblichen Coulombkraft, welche wir als magnetische Kraft bezeichnen.

Vergleich – Flüssigkeitsströmung/elektrischer Strom

Sehen Sie dazu bitte Tabelle 1.4 auf der nächsten Seite.

Magnetfelder

Jede bewegte Ladung erzeugt eine Kraftwirkung auf eine andere bewegte Ladung – zusätzlich zur Coulombkraft F_C. Diese Zusatzkraft ist die magnetische oder Lorentzkraft. Sie definiert auch das magnetische Kraftfeld B:

$$\mathbf{F}_\mathrm{L} = q\mathbf{v} \times \mathbf{B}$$

Tabelle 1.4. Vergleich von Flüssigkeitsströmung und elektrischem Strom

Größe	Flüssigkeitsströmung	elektrischer Strom
Menge, Stromgröße	Volumen V; Volumenstrom $I_\mathrm{V} = \mathrm{d}V/\mathrm{d}t$	Ladung q; elektrischer Strom $I = \mathrm{d}q/\mathrm{d}t$
»treibende Kraft«	Druckdifferenz ΔP	Potentialdifferenz $\Delta\varphi =$ elektrische Spannung U
»Quelle«	Pumpe, Durchsatz $I_{\mathrm{V}0}$; Druckdifferenz P_0	Stromquelle, Strom I_0; Spannung U_0
Leistung	$I_{\mathrm{V}0} \cdot P_0$	$I_0 \cdot U_0$
»Speicher«	Flüssigkeitsspeicher, Querschnittsfläche A : $\Delta P = \rho g h = [\rho g/A]V$	Kondensator: $U = q/C$
E_pot (Speicher)	$[\rho g V]h/2 = [\rho g A]h^2/2 = ([A/\rho g]/2)\,\Delta P^2$ oder $V^2/2[A/\rho g]$	$(C/2)\,U^2$ oder $q^2/2C$
»Trägheitskraft«	Druck durch Beschleunigung: $\Delta P = (m/A)\,\mathrm{d}v/\mathrm{d}t = (m/A^2)\,\mathrm{d}I_\mathrm{V}/\mathrm{d}t = [l\rho/A]\,\mathrm{d}I_\mathrm{V}/\mathrm{d}t$	Spule: $U = -L\,\mathrm{d}I/\mathrm{d}t$
E_kin (Trägheit)	$(V\rho/2)v^2 = ([l\rho/A]/2)\,I_\mathrm{V}^2$	$(L/2)\,I^2$
Widerstand	Rohr: $R_\mathrm{S} = (l/A)(8\pi/R^2)$; $I_\mathrm{V} = \Delta P_\mathrm{R}/R_\mathrm{S}$	$R = (l/A)\rho_\mathrm{E}$; $I = U_\mathrm{R}/R$
E-Erhaltung:	Bernoulli: $P_0 + \rho g h + (\rho/2)v^2 = \Delta P_\mathrm{R}$	Kirchhoff, Maschenregel: $U_0 + q/C + L\mathrm{d}I/\mathrm{d}t = U_\mathrm{R}$
Kontinuität:	$I_\mathrm{V} =$ konst. (Erhaltung der Flüssigkeitsmenge)	Knotenregel: $\sum I_\mathrm{i} = 0$ (Ladungserhaltung)

[Einheit von B: $\mathrm{N/Am} \equiv \mathrm{J/Am^2} \equiv \mathrm{Vs/m^2}$, genannt »Tesla« (T)].

Das Feld $\mathbf{B}$ wird auch das magnetische *Induktionsfeld* bzw. die magnetische Flußdichte genannt; die Einheit $\mathrm{Vs/m^2}$ heißt auch Tesla (s.o.). Die Kraft $\mathbf{F}_\mathrm{L}$ steht senkrecht zum Magnetfeld $\mathbf{B}$ sowie zur Geschwindigkeit $\mathbf{v}$ der bewegten Ladung.

Wie auch im elektrostatischen Fall, definiert man außer dem Kraftfeld auch ein Feld H, das direkt mit seinen Quellen zusammenhängt (vgl. E, D). Dabei gibt es zur Elektrostatik zwei wichtige Unterschiede:

- man hat keine magnetischen (Einzel-)Ladungen (Monopole) gefunden; daher haben die magnetischen Feldlinien keinen Anfang und kein Ende – sie bilden in sich geschlossene Kurven, ihre Quellen sind Ströme, nicht Ladungen;

- das Magnetfeld ist ein Wirbelfeld. Die magnetischen Kraftfeldlinien um einen stromführenden Leiter sind kreisförmig (Richtung: rechte-Hand-Regel!). Die Feldstärke des Magnetfeldes H ist durch das Ampère'sche Gesetz gegeben:

$$I_{(\text{durch A})} = \int\limits_{K \text{ um } A} \mathbf{H} \cdot \mathrm{d}\mathbf{s}$$

  (vgl.: Gauß'sches Gesetz, $q_{(\text{in V})} = \int_{A \text{ um } V} \mathbf{D} \cdot \mathrm{d}\,\mathbf{A}$). Das Integral wird entlang einer Kurve K um die Fläche A gerechnet; der Strom I ist der Gesamtstrom, der durch diese Fläche fließt. Die Magnetfeldstärke um einen Leiter mit Strom I nimmt mit Abstand r wie $1/r$ ab, sie ist gegeben durch $H = I/2\pi r$ (Lösung des Integrals um einen Kreis K) und hat daher die Einheit Ampère/meter (A/m).

Die beiden Felder B und H hängen (im Vakuum) einfach über die Konstante μ_0 zusammen:

$$B = \mu_0\, H \,(\text{im Vakuum}) \;;$$

(vgl. $D = \varepsilon_0 E$; reziproke Definition!)

Die Konstante μ_0 (Magnetfeldkonstante oder Permeabilität des Vakuums) ist eine Naturkonstante analog zu ε_0, wobei μ_0 den Wert $4\pi{\cdot}10^{-7}$ Vs/Am oder $12{,}57{\cdot}10^{-7}$ Vs/Am hat. Die beiden Feldkonstanten μ_0 und ε_0 sind nicht voneinander unabhängig (relativistischer Ursprung des Magnetismus!), sondern hängen über die Vakuum-Lichtgeschwindigkeit c_0 zusammen:

$$c_0 = \frac{1}{\sqrt{\mu_0\,\varepsilon_0}}\,.$$

Magnetische Felder einfacher Stromverteilungen

Das magnetische Dipolmoment (analog zum elektrischen Dipolmoment): man definiert ein magnetisches Dipolmoment durch einen Kreisstrom, als Produkt der Stromstärke I mit der eingeschlossenen Fläche A (ein Vektor in Richtung der Flächennormale; (siehe Abb. 1.15 auf Seite 197).

damit ist:

$$\mu = I\,A$$

[Einheit: Am^2].

Magnetische Dipolmomente werden von einem homogenen B-Feld ausgerichtet (vgl. p,E).

Außer dem Feld eines langen, geraden Stromes (konzentrische Kreise) sowie dem Feld eines Kreisstromes (Dipolfeld) hat das Feld einer langen Spule eine einfache Form: es ist ein homogenes Feld (vgl. E-Feld des Plattenkondensators). Die Richtung des Feldes ist parallel zur Spulenachse, die Feldstärke ist gegeben

Tabelle 1.5. Magnetfeldstärken im Vergleich

relative Magnetfeldstärke	Feldquelle
1 000 000 000 000	Neutronensterne
100 000 000 000	Pulsare
10 000 000 000	
1 000 000 000	
100 000 000	Forschung (kurzzeitig)
10 000 000	
1 000 000	Forschung (Dauerbetrieb)
100 000	Technik; Sterne
10 000	Sonnenflecken
1 000	
100	Norm-Grenzwert
10	Planeten-Feld, Jupiter
1	Planeten-Feld, Erde ($B \simeq 50\ \mu$T, $H \simeq 40$ A/m)
0.1	Elektrogeräte
0.01	Magnetsturm
0.001	Planeten-Feld, Mars; Fernsehgerät
0.000 1	
0.0 000 1	Mond, interplanetares Feld
0.00 000 1	Herz
0.000 000 1	interstellares Feld
0.0 000 000 1	Gehirn
0.00 000 000 1	Augen; intergalaktisches Feld

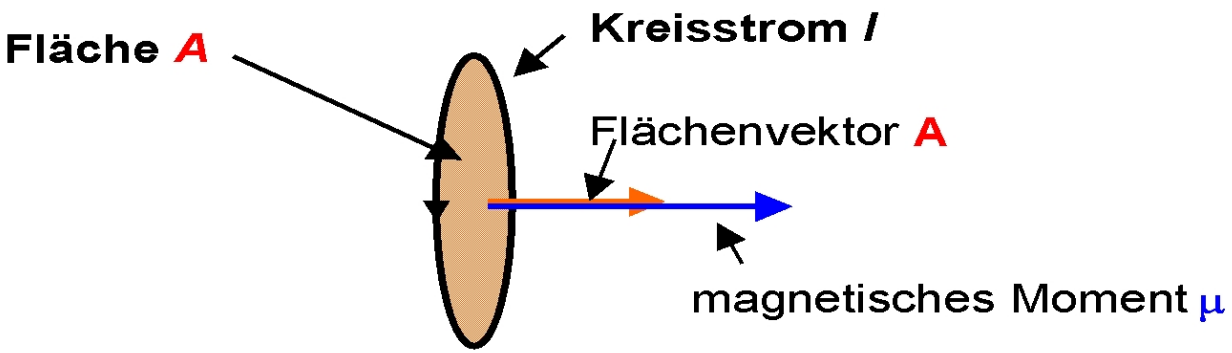


Abbildung 1.15. Magnetisches Moment als Kreisstrom.

durch (siehe Ampère'sches Gesetz):

$$B = \mu_0 \frac{N}{l} I$$

mit N/l = Windungszahl/Länge. Die Spule ist also ein einfaches Bauelement, das eine analoge Rolle für Magnetfelder spielt wie der Plattenkondensator für elektrische Felder (siehe Abb. 1.16 auf Seite 212).

Die elektromagnetischen Feldgleichungen

Wir haben nun einige (geometrische) Eigenschaften der elektrischen ($E-$,$D-$) und der magnetischen ($B-, H-$) Felder gefunden, die man in vier Feldgleichungen für statische Felder zusammenfassen kann:

1. Wirbelfreiheit des statischen E-Feldes (Energieerhaltung!):

$$\int\limits_{K \text{ um } A} \mathbf{E} \cdot \mathrm{d}\mathbf{s} = 0 \; .$$

2. Ströme sind Quellen des H-Feldes (Ampère'sches Gesetz):

$$\int\limits_{K \text{ um } A} \mathbf{H} \cdot \mathrm{d}\mathbf{s} = I_{\text{durch } A}$$

3. Ladungen sind Quellen des D-Feldes (Gauß'sches Gesetz):

$$\iint\limits_{A \text{ um } V} \mathbf{D} \cdot \mathrm{d}\mathbf{A} = q_{\text{ in}V}$$

4. Es gibt keine magnetischen Ladungen (magnetischen Monopole):

$$\iint\limits_{A \text{ um } V} \mathbf{B} \cdot \mathrm{d}\mathbf{A} = 0 \; .$$

Die Integrale werden in den ersten beiden Gleichungen entlang einer geschlossenen Kurve K gerechnet, welche die Fläche A umschließt; in den letzten beiden Gleichungen werden die Integrale über die geschlossene Fläche A gerechnet, die das Volumen V umschließt. Diese Gleichungen beschreiben vollständig die statischen Felder, die durch Ladungen und Ströme entstehen (aber ohne den Einfluß von Materie). Durch die Beziehungen $D = \varepsilon_0 \, E$ und $B = \mu_0 \, H$ sind die Gleichungen miteinander gekoppelt, sie enthalten nur zwei unabhängige Größen (z. B. E und B). Wir werden sehen, daß sie noch ergänzt werden müssen, wenn wir eine *Zeitabhängigkeit* der Felder zulassen!

Materie im magnetostatischen Feld

Ähnlich wie im elektrostatischen Feld reagiert die Materie im statischen Magnetfeld durch Bildung mikroskopischer Dipolmomente; nun sind es aber nicht elektrische, sondern magnetische Dipole.

Im Gegensatz zum elektrischen Fall gibt es in der Magnetostatik keine Ladungen – und daher keine magnetischen Leiter. Die magnetischen Feldlinien bilden geschlossene Kurven, ohne Anfang und Ende. Außerdem sind die Felder B und H etwas anders definiert als die entsprechenden elektrischen Felder E und D. Ansonsten verläuft die Behandlung von Materie im Magnetfeld genau analog zur Behandlung der Materie im elektrischen Feld.

Die magnetischen Dipole werden mit Hilfe von Dipolmomenten beschrieben, definiert als $\mu = I\mathbf{A}$, wobei I die Stärke eines (mikroskopischen) Ringstromes und A die vom Ringstrom eingeschlossene Fläche sind (der Vektor $\mathbf{A}$ zeigt in Richtung der Flächennormale, Richtungssinn durch die Rechte-Hand-Regel gegeben!). Die Einheit des magnetischen Dipolmomentes, $[\mu]$, ist Am^2.

Wirkt ein statisches Magnetfeld $B_0 = \mu_0 H_0 = \mu_0 I_0 (N/l)$ (I_0 = Strom von freien Ladungen in einer Spule mit N Windungen und der Länge l), so produziert dieses ausgerichtete magnetische Dipolmomente (durch Induktion von mikroskopischen Ringströmen bzw. Orientierung vorhandener Dipole). Diese heben sich innerhalb der Materie gegenseitig auf, wie im elektrischen Fall, und können insgesamt durch Flächenströme I_M beschrieben werden (Magnetisierungsströme).

Man definiert die Magnetisierung der Materie als Gesamtdipolmoment pro Volumen, ganz analog zur elektrischen Polarisation:

$$|M| = \frac{\sum \mu_\mathrm{i}}{V} = \frac{I_\mathrm{M} A}{V} = \frac{I_\mathrm{M}}{d} \; ;$$

A ist die Fläche der Materie, d ihre Dicke.

Es existieren nun drei Felder:

- M nur innerhalb der Materie, mit $|M| = I_{\mathrm{M}}/d$;
- H überall, mit $|H| = I_0(N/l)$ (Spule);
- $B = B_0$ außerhalb der Materie, $B = B_{\mathrm{m}} \neq B_0$ (i.A.) innerhalb der Materie (B macht einen Sprung an der Oberfläche in der einfachen Geometrie einer langen Spule mit einem Materie-Zylinder im Inneren).

Allgemein gilt

$$B = \mu_0(H_0 + M) = \mu_0 H_{\mathrm{m}}.$$

Eine alternative Beschreibung des Vorgangs basiert auf der Änderung der B-Feldstärke in der Materie:

$$\frac{B_{\mathrm{m}}}{B_0} = \mu_{\mathrm{r}} \qquad \text{(dimensionslose Zahl, } \textit{relative Permeabilitätszahl}\text{)} \ .$$

Die Feldstärke einer Spule, welche Materie der relativen Permeabilität μ_{r} enthält, ist gegeben durch:

$$B_{\mathrm{m}} = \mu_{\mathrm{r}} B_0 = \mu_0 \mu_{\mathrm{r}} I \left(\frac{N}{l}\right) = \mu I(N/l).$$

(die letzten beiden Formeln gelten für eine lange Spule der Länge l, Windungszahl N, Füllfaktor für die Materie = 100%).

Wir finden drei Typen der Materie bzgl. magnetischem Verhalten:

1. Diamagnetika, mit $\mu_{\mathrm{r}} < 1$ schwächen das magnetische Feld B;
2. Paramagnetika, mit $\mu_{\mathrm{r}} > 1$ verstärken das Feld B;

3. Ferromagnetika, mit $\mu_r \to \infty$ besitzen ein eigenes spontanes Feld B (und daher eine spontane Magnetisierung!)

Die Magnetisierung M ist i. a. eine Funktion von B_0 und T.

Biomagnetismus

Unter Biomagnetismus versteht man die Magnetfelder, die in Lebewesen entstehen durch magnetische Substanzen in ihren Organen bzw. durch elektrische Ströme physiologischen Ursprungs. Die Tabelle 1.5 sowie die Abbildung 1.18 gibt eine Übersicht der Werte [als Induktionsfeld $B = \mu_0 H$, Einheit $\mathrm{Vs/m^2} \equiv$ T (Tesla)], die am menschlichen Körper gemessen werden.

Eine Messung dieser Felder (Magnetokardiogramm MKG, Magnetoencephalogramm MEG) ergibt komplementäre und oft detailliertere Informationen als die entsprechenden elektrischen Messungen (EKG, EEG); sie ist aber noch aufwendiger und schwieriger zu interpretieren.

Zeitlich veränderliche Spannungen und Ströme

Nun betrachten wir zeitabhängige elektrische Vorgänge, bei denen sich Strom und Spannung ständig verändern. Dabei kommt ein neues Phänomen zum Vorschein: die *Induktion*.

Das Induktionsgesetz

Michael Faraday entdeckte, daß ein sich zeitlich veränderndes Magnetfeld eine elektrische Spannung in einer Schleife oder Spule aus leitendem Material erzeugt: die Induktionsspannung U_i. Weitere Versuche

zeigten, daß diese Spannung proportional zur zeitlichen Ableitung des magnetischen Flusses $\Phi(A)$ durch die Fläche A der Spule oder Schleife ist:

Der Fluß ist dabei die Anzahl der Magnetfeldlinien, die die Fläche A durchschneiden:

$$\Phi_{\mathrm{B}}(A) = \mu_0 \iint_A \mathbf{H} \cdot \mathrm{d}\mathbf{A}$$

wo hier der Fluß des magnetischen Induktionsfeldes B gemeint ist, mit

$$B = \mu_0 H \ .$$

Das Induktionsgesetz lautet nun:

$$U_{\mathrm{i}} = -\frac{\mathrm{d}\Phi_{\mathrm{B}}}{\mathrm{d}t} \ ;$$

die Induktionsspannung ist gegeben durch die zeitliche Änderung des Flußes (d. h. des Produktes aus B und A) und ist stets ihrer Ursache entgegengerichtet (Minuszeichen).

Es gibt verschiedene Wege, eine zeitliche Änderung des Flußes zu produzieren: das Feld H (oder B) kann sich ändern (Änderung des Stromes durch eine Feldspule, Bewegung eines Dauermagneten), die Fläche A kann sich ändern (Zusammenziehen einer Drahtschleife), oder die relative Einstellung der Fläche zum Feld kann sich ändern (Drehung einer Drahtschleife). Die letzte Methode wird in elektrischen Generatoren (Dynamos, Lichtmaschinen) angewandt.

Dreht man eine Spule mit konstanter Winkelgeschwindigkeit ω in einem konstanten, homogenen Magnetfeld, so verläuft die Induktionsspannung U_{i} in der Spule sinusförmig:

$$U_{\mathrm{i}}(t) = U_0 \sin[\omega t + \varphi] \ .$$

Wechselspannung

Diese zeitlich-sinusförmige Spannung nennt man eine Wechselspannung, die rotierende Spule im Magnetfeld einen Wechselspannungsgenerator. Schließt man die Spannung $U(t)$ an einen Widerstand R an, so fließt ein Strom $I(t)$ nach dem Ohm'schen Gesetz,

$$I(t) = \frac{U(t)}{R} \; .$$

Strom und Spannung laufen synchron, ihre Phasen φ sind gleich; sie sind nicht *phasenverschoben*. Die Leistung, die im Widerstand als Joule'sche Wärme verbraucht wird, ist wie beim zeitlich konstanten Strom das Produkt aus Strom und Spannung:

$$\begin{aligned} P(t) = U(t)I(t) &= U_0 \sin[\omega t + \varphi] \frac{U(t)}{R} \\ &= U_0 \sin[\omega t + \varphi] \frac{U_0}{R} \sin[\omega t + \varphi] \\ &= \frac{U_0^2}{R} \sin^2[\omega t + \varphi]. \end{aligned}$$

Die mittlere Leistung $<P>$, gemittelt über eine Sinusschwingung, ist dann

$$\begin{aligned} <P> &= \frac{U_0^2}{R} <\sin^2[\omega t + \varphi]> \\ &= \frac{U_0^2}{2R} \qquad \text{oder} \qquad \frac{U_0 I_0}{2} \; , \end{aligned}$$

da der Mittelwert $<\sin^2>$ über eine volle Schwingung gleich $1/2$ ist:

Man definiert daher Effektivwerte U_{eff}, I_{eff} für Strom und Spannung mit $U_{\text{eff}} = U_0/\sqrt{2}$ und $I_{\text{eff}} = I_0/\sqrt{2}$, so daß

$$U_{\text{eff}} I_{\text{eff}} = \frac{U_0 I_0}{2} = < P > \quad .$$

Wechselstromwiderstände

Läßt man eine Wechselspannung auf *andere* Schaltelemente wirken, wie z. B. einen Kondensator oder eine Spule, so laufen Strom und Spannung *auseinander*.

Die Spannung am Kondensator führt zu einem Ladestrom, der phasenverschoben ist relativ zur Spannung. Dies kann man für eine sinusförmige Spannung leicht ausrechnen:

$$q(t) = CU(t) \qquad \text{und} \qquad I(t) = \frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t} = C\frac{\mathrm{d}U(t)}{\mathrm{d}t}$$

$$= CU_0 \frac{\mathrm{d}(\sin[\omega t + \varphi])}{\mathrm{d}t}$$

d. h.

$$I(t) = \omega C U_0 \cos[\omega t + \varphi] = \omega C U_0 \sin\left[\omega t + \varphi + \frac{\pi}{2}\right] \quad .$$

(Die letzte Gleichung folgt aus der trigonometrischen Beziehung $\sin[\alpha + \frac{\pi}{2}] = \cos\alpha$.)

Wir finden daher folgende Wirkungen des Kondensators auf eine Wechselspannung $U(t)$:

- der Strom $I(t)$ ist phasenverschoben um $+\frac{\pi}{2}$ relativ zur Spannung $U(t)$; dann ist die mittlere Leistung $< P >$ im Kondensator gegeben durch:

$$U(t)I(t) = U_0 I_0 < \sin[\omega t + \varphi] \cos[\omega t + \varphi] >= 0!!$$

- die Amplituden von Spannung und Strom verhalten sich wie

$$I_0 = \omega C U_0 = \frac{U_0}{R_{\text{eff}}} \qquad \text{mit} \qquad R_{\text{eff}}(\omega) = \frac{1}{\omega C} \; .$$

Man nennt den Effektivwiderstand $R_{\text{eff}}(\omega)$ auch »Scheinwiderstand« oder »Blindwiderstand«, da er keine Leistung verbraucht: der Kondensator speichert nur Energie und gibt sie wieder (1/4 Schwingung später) frei.

Wir können eine ähnliche Rechnung für eine Spule durchführen: wenn die Spule einen Wechselstrom trägt, erzeugt sie in ihrer Mitte ein magnetisches Wechselfeld $H(t)$ bzw. $B(t)$; dieses (zeitlich veränderlicher Fluß durch die Spule, $B(t) \cdot A$!) induziert wiederum eine Spannung $U_{\text{i}}(t)$, die proportional der zeitlichen Ableitung des Feldes $B(t)$ ist:

Bei einer Spule der Länge l, Windungszahl N und des Radius r ist:

$$\begin{aligned} U_{\text{i}}(t) &= -\frac{\mathrm{d}[B(t)A]}{\mathrm{d}t} \\ &= -\frac{\mathrm{d}\left[\left(\frac{\mu_0 N}{l}\right) I(t) \left(\pi r^2 N\right)\right]}{\mathrm{d}t} \\ &= -\left[\frac{\mu_0 \pi r^2 N^2}{l}\right] \frac{\mathrm{d}I(t)}{\mathrm{d}t} \\ &= -L \frac{\mathrm{d}I(t)}{\mathrm{d}t} \; . \end{aligned}$$

Die Konstante $L = [\mu_0 \pi r^2 N^2/l]$ nennt man die Selbstinduktivität der Spule. Die Spule zeigt eine Art »elektrische Trägheit«: sie widerstrebt jeglicher Änderung des Stromes $I(t)$, indem sie eine Gegenspannung

$U_\mathrm{i}(t)$ aufbaut. (Enthält die Spule in ihrem Inneren Materie mit der relativen Permeabilitätszahl μ_r, muß man anstatt μ_0 das Produkt $\mu = \mu_0\,\mu_\mathrm{r}$ in L einsetzen.)

Setzen wir für den Strom einen Wechselstrom $I(t) = I_0 \sin[\omega t + \varphi]$ an, so finden wir (ähnliche Rechnung wie beim Kondensator) daß in der Spule, der Strom um $-\frac{\pi}{2}$ phasenverschoben ist relativ zur Spannung $U_\mathrm{i}(t)$, die Leistung ist wieder im Mittel gleich Null.

Der Effektivwiderstand der Spule ist gegeben durch:

$$R_\mathrm{eff}(\omega) = \omega L\ .$$

Kondensator und Spule wirken also beide bei Wechselspannung als Energiespeicher, sie verschieben Spannung und Strom so gegeneinander, daß keine Leistung verbraucht wird. Die Effektivwiderstände von beiden sind frequenzabhängig; R_eff des Kondensators wird unendlich, wenn $\omega \to 0$ geht (Gleichspannung, keinen Ladungsdurchgang), R_eff der Spule geht gegen Null, wenn $\omega \to 0$ geht (nur Ohm'scher Widerstand).

Der elektrische Schwingkreis

Schließt man einen Kondensator und eine Spule zusammen, so führen ihre gegenläufige Frequenzabhängigkeiten zu einem Resonanzverhalten: sie haben eine Resonanzfrequenz, wo der Gesamtwiderstand maximal (bzw. minimal, je nach Schaltung) ist. Dies nennt man einen Schwingkreis:

Er läßt sich in exakter Analogie zum mechanischen harmonischen Oszillator beschreiben (Schwingungsgleichung!). Man kann mit einem Schwingkreis auch Wechselspannung erzeugen, in dem man ihm Energie zuführt (Aufladen des Kondensators, Induktion in der Spule).Die Eigenfrequenz ω_0 ist gegeben durch $\omega_0 = 1/\sqrt{LC}$.

Vergleich von elektrischen und mechanischen Schwingungen

Sehen Sie dazu bitte die Tabelle 1.6 auf der folgenden Seite.

Feldgleichungen bei zeitlich veränderlichen Feldern

Feldgleichungen (Maxwell-Gleichungen) Wie in Abschnitt 1.1.1 auf Seite 197 erwähnt, müssen die Feldgleichungen im Falle nicht statischer Felder noch modifiziert werden.

Zunächst ist das Faraday'sche Induktionsgesetz zu berücksichtigen; es ändert die Wirbelfreiheit des elektrischen Feldes E. Ein elektrostatisches Feld muß wirbelfrei sein, da man sonst durch ewiges Kreisen einer Ladung ein *perpetuum mobile* bauen könnte, was den Energieerhaltungssatz verletzen würde. Bei einem zeitlich-veränderlichen Feld ist dies jedoch kein Problem mehr, da die Veränderung des Feldes mit Arbeit verbunden ist, so daß die Energie nicht aus dem Nichts entstehen müßte. Die Induktionsspannung U_i kann mit Hilfe des Zusammenhangs zwischen Potentialdifferenz und elektrischem Feld als Integral des Feldes um eine geschlossene Kurve ausgedrückt werden:

$$U_\mathrm{i}(t) = \int\limits_{K \text{ um } A} \mathbf{E} \cdot \mathrm{d}\mathbf{s}$$

so daß, mit dem Induktionsgesetz, $U_\mathrm{i}(t) = -\mathrm{d}\Phi/\mathrm{d}t = -\mathrm{d}/\mathrm{d}t(\int \mathbf{B} \cdot \mathrm{d}\mathbf{A})$,

$$\int\limits_{K \text{ um } A} \mathbf{E} \cdot \mathrm{d}\mathbf{s} \; = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \left(\iint\limits_{A} \mathbf{B} \cdot \mathrm{d}\mathbf{A} \right)$$

als erste Feldgleichung gilt. Das doppelte Integralzeichen bedeutet, daß über die Fläche A (eingeschlossen

Tabelle 1.6. Vergleich von elektrischen mit mechanischen Schwingungen

Größe	Parallel-Schwingkreis	Federpendel
»Auslenkung«	Ladung q (As)	Strecke x (m)
»Bewegungsgröße«	Strom $I = \mathrm{d}q/\mathrm{d}t$ (A)	Geschwindigkeit $v = \mathrm{d}x/\mathrm{d}t$ (m/s)
»Beschleunigung«	$\mathrm{d}I/\mathrm{d}t = \mathrm{d}^2q/\mathrm{d}t^2$ (A/s)	$a = \mathrm{d}v/\mathrm{d}t = \mathrm{d}^2x/\mathrm{d}t^2$ (m/s^2)
»rücktreibende Kraft«	$U_\mathrm{C} = (1/C)\,q$ (V)	$F_\mathrm{el} = -Dx$ (N)
»Trägheit«	Induktivität L (Vs/A) $U_L = -L\mathrm{d}I/\mathrm{d}t = -L\mathrm{d}^2q/\mathrm{d}t^2$	Masse m (kg) $F_\mathrm{Tr} = ma = m\mathrm{d}^2x/\mathrm{d}t^2$
»Bewegungsenergie«	magnetische Feldenergie $E_\mathrm{B} = (L/2)I^2$ (J)	kinetische Energie $E_\mathrm{kin} = (m/2)v^2$ (J)
»potentielle Energie«	elektrische Feldenergie $E_E = (1/2\,C)q^2$ (J)	elastische Energie $E_\mathrm{el} = (D/2)x^2$ (J)
»Kräftegleichgewicht«	Maschenregel, $U_L - U_\mathrm{C} = 0$	actio = reactio, $F_\mathrm{el} = F_\mathrm{Tr}$
Energieerhaltung	$E_\mathrm{B} + E_E = \mathrm{konst.}$	$E_\mathrm{kin} + E_\mathrm{el} = \mathrm{konst.}$
Schwingungsgleichung	$\mathrm{d}^2q/\mathrm{d}t^2 + (1/LC)q = 0$	$\mathrm{d}^2x/\mathrm{d}t^2 + (D/m)x = 0$
Lösung	$q(t) = q_0 \sin[\omega_0 t + \varphi_0]$ mit $\omega_0 = \sqrt{1/LC}$	$x(t) = x_0 \sin[\omega_0 t + \varphi_0]$ mit $\omega_0 = \sqrt{D/m}$
Dämpfung	elektr. Widerstand $U_R = RI$	Reibungskraft $F_R = -kv$

von der Kurve K) integriert wird. Dies ist die allgemeine, integrale Form des Induktionsgesetzes; im zeitunabhängigen Fall wird die rechte Seite wieder gleich Null.

Zur Vervollständigung der Feldgleichungen muß das Ampère'sche Gesetz (d. h. die zweite Feldgleichung, $\int_{K \text{ um } A} \mathbf{H} \cdot \mathrm{d}\mathbf{s} = I_{\text{durch } A}$) auch ergänzt werden. J.C. MAXWELL bemerkte, daß sie bei zeitlich veränderlichen Vorgängen (z. B. der Entladung eines Kondensators in einem RC-Kreis) zu Widersprüchen führt, da die Fläche A so gewählt werden könnte, daß z. B. der Anschluß zum Kondensator, der den Entladestrom führt, diese Fläche nicht durchschneidet und der Strom $I_{\text{durch}\, A}$ scheinbar verschwinden würde; trotzdem entsteht ein Magnetfeld während des Stromflusses. Er schlug vor, einen zweiten, zeitabhängigen Term hinzuzufügen, analog der rechten Seite der Gleichung für das Induktionsgesetz: im Kondensator während der Entladung exisitert nämlich ein zeitabhängiges elektrisches Feld, der elektrische Fluß Φ_{E} durch die Fläche A zwischen den Kondensatorplatten ändert sich zeitlich:

$$\int\limits_{K \text{ um } A} \mathbf{H} \cdot \mathrm{d}\mathbf{s} = I_{\text{durch } A} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \left(\varepsilon_0 \iint\limits_{A} \mathbf{E} \cdot \mathrm{d}\ bfA \right) \ .$$

Der Faktor ε_0 sorgt dafür, daß die Einheiten stimmen. Dieser Zusatzterm wird »Maxwell'scher Verschiebungsstrom« genannt, er hat die Einheit eines Stromes und spielt eine analoge Rolle zu der des freien Stromes I. Damit lauten die vier Feldgleichungen (ohne Materie aber mit Zeitabhängigkeit), die Maxwell'schen Gleichungen, wie folgt:

1. Induktionsgesetz für das E-Feld (Faraday'sches Gesetz):

$$\int\limits_{K \text{ um } A} \mathbf{E} \cdot \mathrm{d}\mathbf{s} = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \left(\iint\limits_{A} \mathbf{B} \cdot \mathrm{d}\mathbf{A} \right) \ . \tag{1.9}$$

2. Ströme sind Quellen des H-Feldes (Ampère'sches Gesetz plus Maxwell'schen Verschiebungsstrom):

$$\int\limits_{K \text{ um } A} \mathbf{H} \cdot \mathrm{d}\mathbf{s} = I_{\text{durch } A} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \left(\varepsilon_0 \iint\limits_{A} \mathbf{E} \cdot \mathrm{d}\mathbf{A} \right) \ . \tag{1.10}$$

3. Ladungen sind Quellen des D-Feldes (Gauß'sches Gesetz):

$$\iint\limits_{A \text{ um } V} \mathbf{D} \cdot \mathrm{d}\mathbf{A} = q_{\text{in } V} \tag{1.11}$$

4. Es gibt keine magnetischen Ladungen (Monopole):

$$\iint\limits_{A \text{ um } V} \mathbf{B} \cdot \mathrm{d}\mathbf{A} = 0 \ . \tag{1.12}$$

Diese Gleichungen sind fast symmetrisch bezüglich der Felder D und H sowie $E = (1/\varepsilon_0)D$ und $B = \mu_0 H$; die verbleibende Unsymmetrie resultiert daraus, daß elektrische Ladungen q (Monopole) existieren, magnetische Ladungen (oder Ströme) jedoch nicht. Letztere sind nicht durch irgendein physikalisches Gesetz verboten, sie sind aber bis jetzt nie beobachtet worden. Verwendung der Beziehung $B = \mu_0 H$ erlaubt es, die Gleichungen (1.9) und (1.10) miteinander zu koppeln, so daß ein sich zeitlich änderndes E-Feld ein B-Feld aufbaut und umgekehrt; als Ergebnis erhält man zwei Wellengleichungen (hier eindimensional angegeben, vgl. im Abschnitt auf Seite 118):

$$\frac{\partial^2 E(x,t)}{\partial x^2} = \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 E(x,t)}{\partial t^2} \ ,$$

$$\frac{\partial^2 B(x,t)}{\partial x^2} = \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 B(x,t)}{\partial t^2} \ .$$

Diese beschreiben eine elektromagnetische Welle, in x-Richtung laufend, die aus senkrecht-(in y- bzw. z-Richtung) stehenden, sinusförmigen E- und B-Feldern besteht. (Die Bedingungen für die Feldrichtungen ergeben sich aus den anderen beiden Feldgleichungen.)

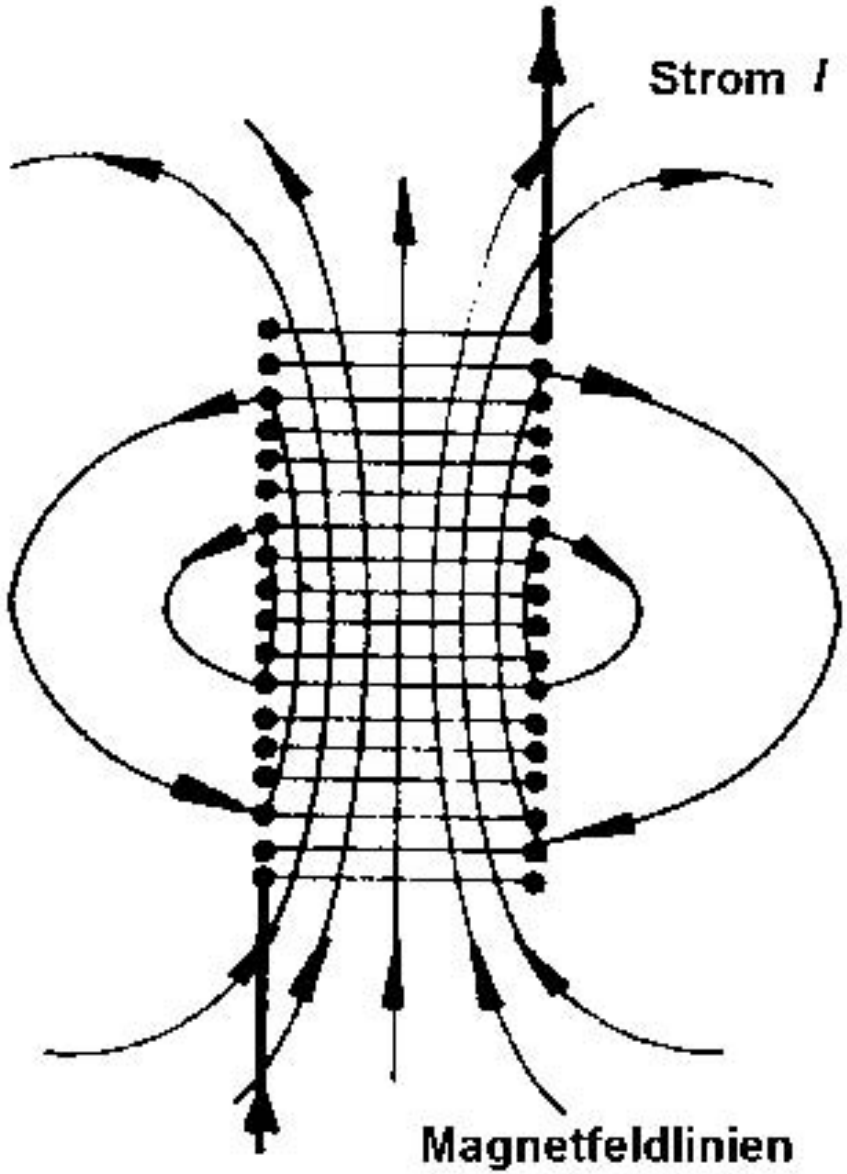


Abbildung 1.16. Stromführende Spule im Querschnitt. Das Magnetfeld H innerhalb der Spule ist nahezu homogen (überall gleiche Stärke und Richtung)

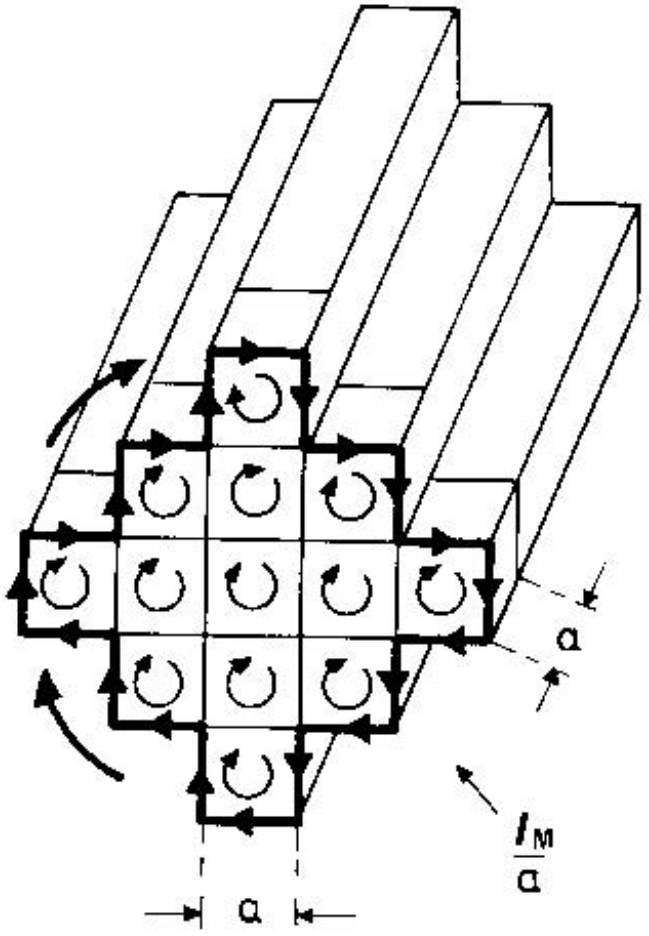


Abbildung 1.17. Schematische Darstellung von Materie in einem Magnetfeld. Atomare Dipole sind durch kleine Kreisströme symbolisiert; der Abstand der Atome ist gegeben durch die Gitterkonstante a. Sie fügen sich an den Enden des Materiestücks zu einem gesamten Flächenstrom I_M zusammen. Außerhalb der Materie entsteht durch die gerichtete Dipole ein äußeres Magnetfeld (gekrümmte Pfeile)

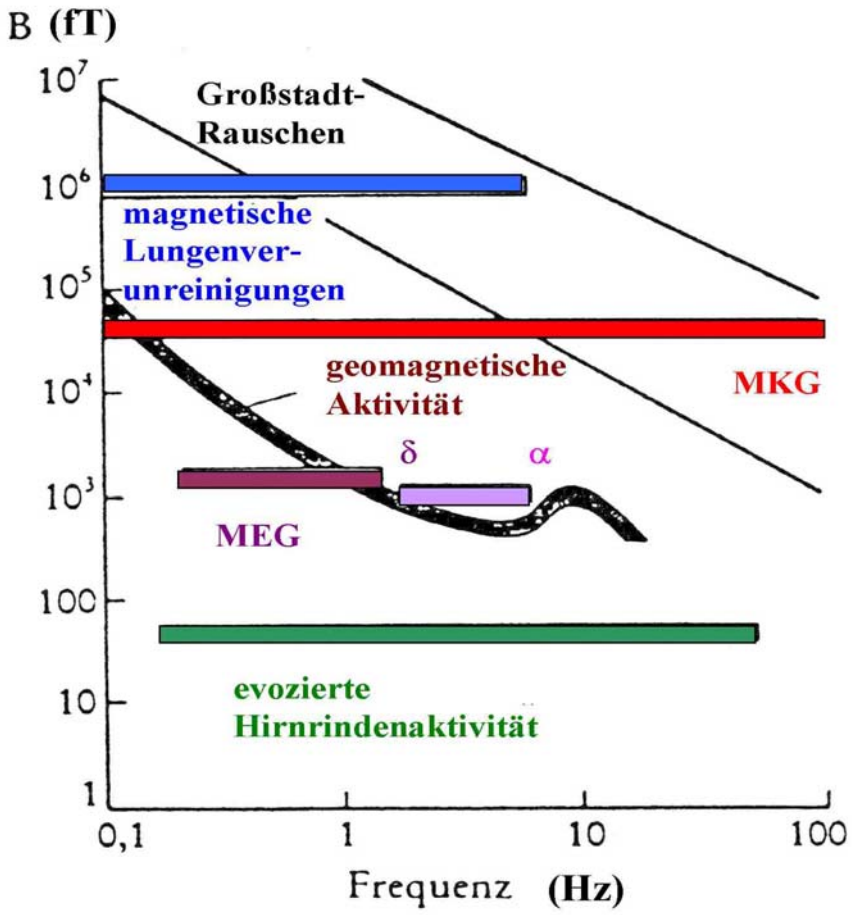


Abbildung 1.18. Biomagnetismus

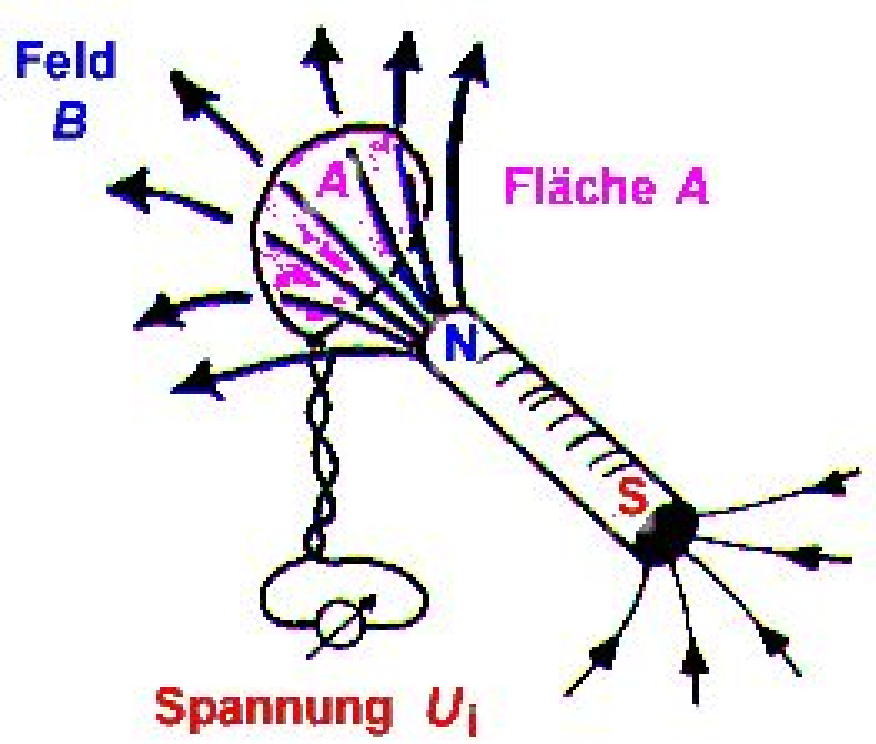


Abbildung 1.19. Drahtschleife im B-Feld eines Stabmagneten. Bewegung oder Drehung der Schleife induziert die Spannung U_i in der Schleife, nach dem Faraday'schen Induktionsgesetz

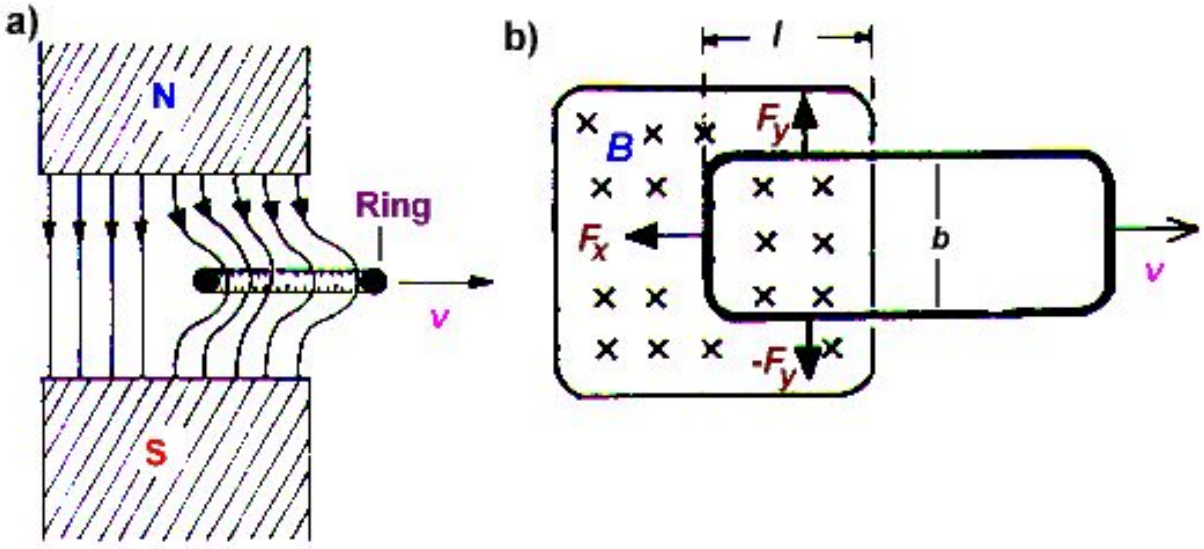


Abbildung 1.20. Induktion durch Bewegung: ein Metallring wird aus dem Feldbereich eines Dauermagneten mit der Geschwindigkeit v in $+x$-Richtung gezogen. Die dabei entstehende Änderung des magnetischen Flusses Φ durch den Ring induziert die Spannung U_i im Ring und führt zu einem Induktionsstrom I_i. Dieser erzeugt wiederum ein eigenes Induktionsfeld B_i, das sich zum äußeren Feld B addiert. Das Gesamtfeld wirkt der Ursache der Induktion entgegen, d. h. der Fluß in dem Ring tendiert dazu, konstant zu bleiben [die Feldlinien werden »mitgezogen«, siehe Teilbild a)]. Im Teilbild b) (Draufsicht) sieht man den Ring von oben, die Fläche $A = l\,b$ im Feld ändert sich und bewirkt die Änderung des Flußes Φ. Der Induktionsstrom erzeugt eine Kraftwirkung (Lorentzkräfte) im Feld B, die Kraft F_x wirkt der Bewegung v entgegen

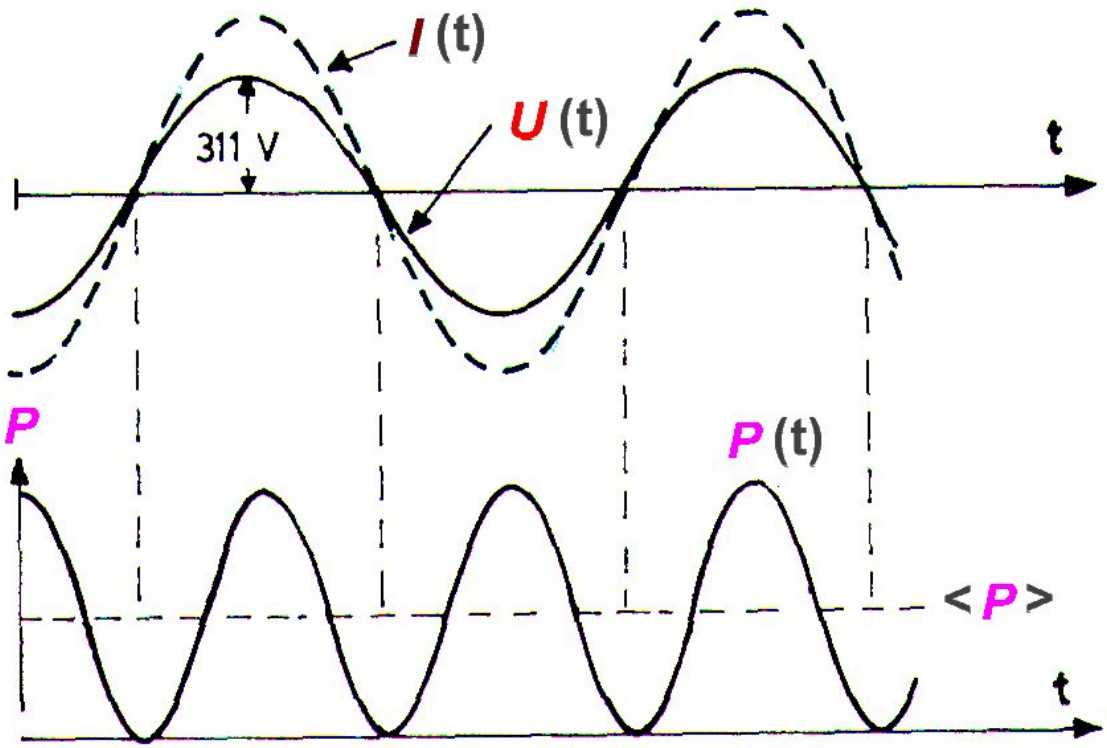


Abbildung 1.21. Strom $I(t)$, Spannung $U(t)$ und Leistung $P(t)$ in einem Wechselstromkreis mit Ohm'schem Widerstand. Strom und Spannung sind sinusförmig und in Phase miteinander. Der Effektivwert der Spannung ist 220 V, die maximale Spannung U_0 (Maximum der Sinusfunktion) beträgt 311 V: 220 V = 311 V/$\sqrt{2}$. Die Leistung $P(t)$ ist proportional zu $\sin^2(\omega t)$: $P(t) = P_0 \sin^2(\omega t)$. Die mittlere Leistung $< P >$ ist als gestrichelte Linie dargestellt, sie hat den Wert $1/2P_0$

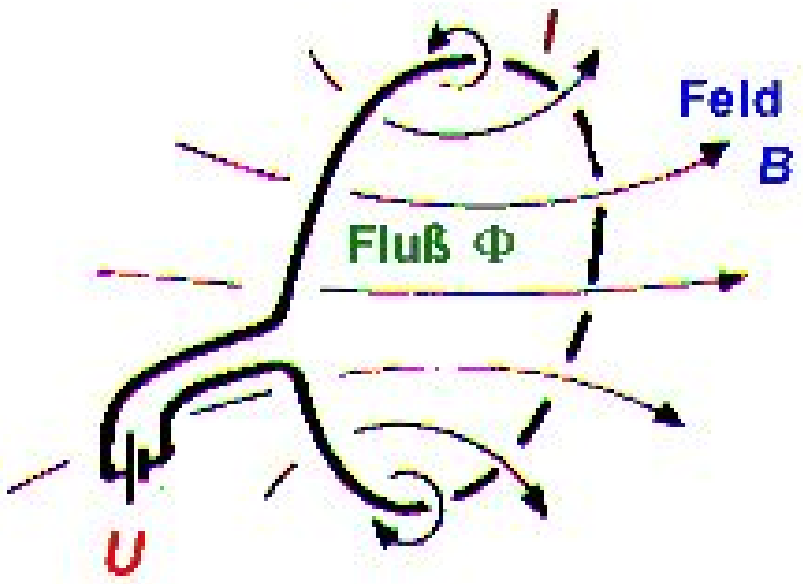


Abbildung 1.22. Drahtschleife mit einer externen Spannungsquelle. Der Strom I im Draht erzeugt das magnetische Induktionsfeld B und somit den Fluß $\Phi = BA$ (A = Fläche der Schleife). Ändert sich die Spannung U zeitlich (z. B. $U(t) = U_0 \sin[\omega\, t + \varphi]$), so werden B und Φ auch zeitlich verändert, eine Induktionsspannung $U_\mathrm{i} = -\mathrm{d}\Phi/\mathrm{d}t$ erscheint zwischen den Enden der Drahtschleife [entgegengesetzt zur momentanen externen Spannung $U(t)$]

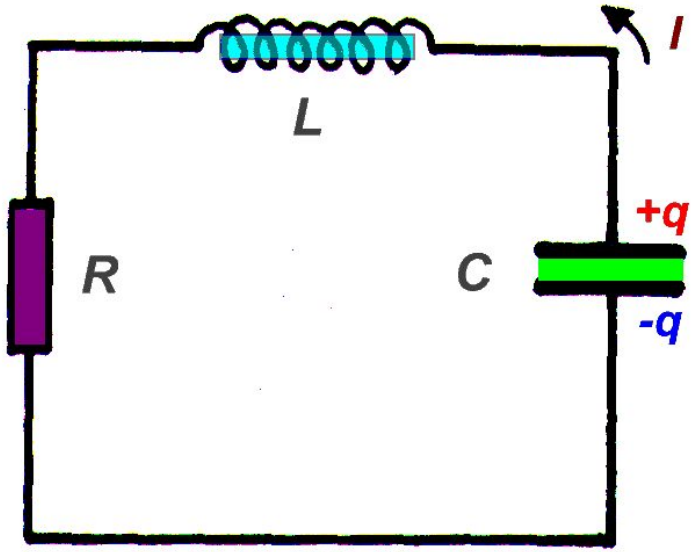


Abbildung 1.23. Elektrischer Schwingkreis (LRC-Kreis). Der Kondensator speichert elektrische Energie in seinem elektrischen Feld, die Spule speichert magnetische Energie in ihrem Magnetfeld. Die Schwingungsenergie wechselt zwischen diesen beiden Formen, wie in einem mechanischen Oszillator zwischen potentieller und kinetischer Energie. Der Widerstand wandelt Schwingungsenergie in Wärme um und bewirkt damit eine Dämpfung der Schwingungen.

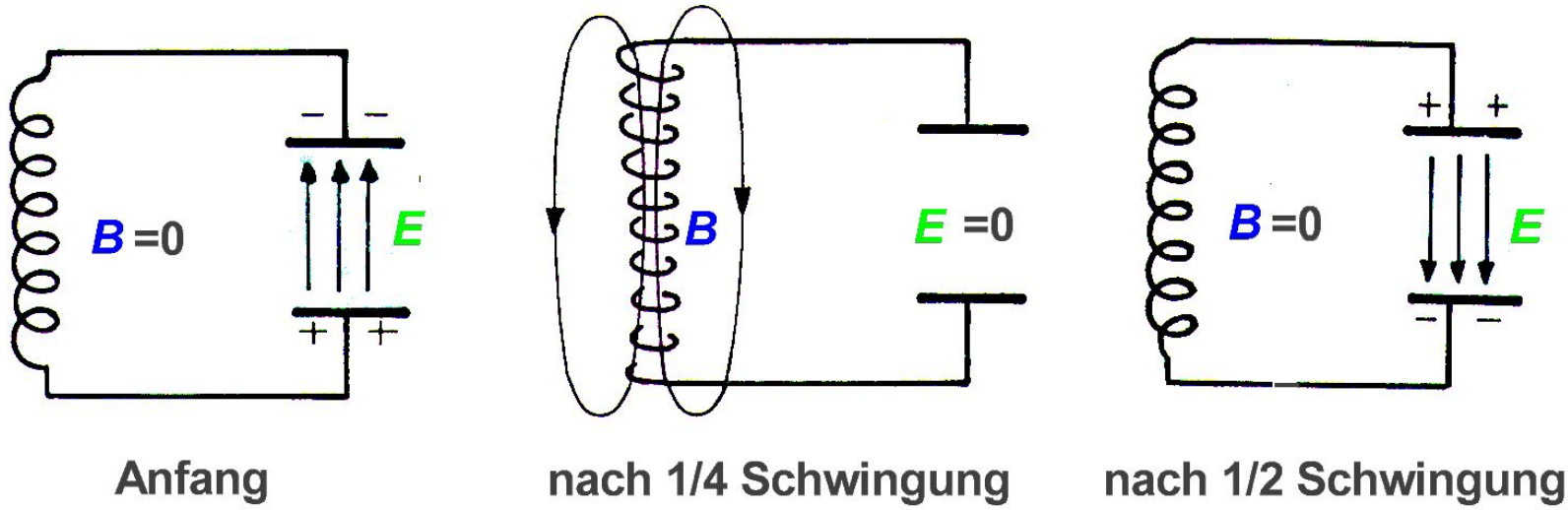


Abbildung 1.24. Elektromagnetische Schwingungen in einem LC-Kreis. Im linken Bild ist der Kondensator gerade aufgeladen, die Schwingungsenergie ist in seinem elektrischen Feld gespeichert, der Strom ist null. Im mittleren Bild, nach einer Viertelschwingung, hat sich der Kondensator entladen, der Strom ist maximal und erzeugt das Magnetfeld B in der Spule, wo auch die Energie nun gespeichert ist. Im rechten Bild, nach einer halben Schwingung, hat der Induktionsstrom aus der Spule den Kondensator umgekehrt aufgeladen, die Energie ist wieder dort gespeichert. Der Vorgang wiederholt sich nun mit umgekehrtem Vorzeichen, bis der Anfangszustand wieder (nach einer vollen Schwingung) erreicht wird.

2 Aufbau der Materie (I): Kernphysik

Wir beginnen mit einer sehr bekannten Gleichung:

$$E = mc^2 \ .$$

Im Jahre 1911 entdeckte RUTHERFORD mit Hilfe von Streuexperimenten, daß Atome aus leichten, negativ geladenen *Elektronen* (»Atomhülle«) und einem massiven, positiv geladenen, viel kleineren *Atomkern* bestehen. Später stellte man fest, daß die Atomkerne z.T. *instabil* sind (schon bekannte »Radioaktivität«) und zwei Kernbausteine (positive *Protonen*, ungeladene *Neutronen*) enthalten. Der radioaktive Zerfall findet statt, wenn ein Atomkern einen Überschuß an Masse (und daher *Energie*) besitzt (Massenformel).

2.1 Kern-Zerfallstypen

Instabile Atomkerne zeigen drei häufige sowie einige seltenere Zerfallstypen. Die drei häufig vorkommenden Zerfälle, bekannt seit den frühen Tagen der Untersuchung der natürlichen Radioaktivität, sind:

1. der α-Zerfall: Zerfall eines überschweren Kerns, wobei er ein »Alphateilchen« (2 Protonen + 2 Neutronen = $^4_2$He-Kern) ausschleudert und dabei seine Ladung Z um 2, seine Massenzahl A um 4 Einheiten reduziert.

2. der β-Zerfall: Zerfall eines neutronenreichen Kerns, in dem ein Neutron in ein Elektron, ein Proton sowie ein Neutrino zerfällt. Prototyp: Zerfall des freien Neutrons:

   $$n \rightarrow p + e^- + \underline{\nu} \quad \text{(Halbwertszeit 10,6 min)}$$

   bzw.

   $$^{60}\text{Co} \rightarrow \ ^{60}\text{Ni} + e^- + \underline{\nu} \quad \text{(5,26 Jahre)}$$

   Hierbei bleibt A gleich, Z erhöht sich um 1 Einheit.

   Bei *protonenreichen* Kernen (künstliche Radioaktivität!) geschieht der umgekehrte Prozeß des *Positron-Zerfalls:*

   $$^{22}\text{Na} \rightarrow \ ^{22}\text{Ne} + e^+ + \nu \quad \text{(2,6 Jahre)}$$

   oder des *Elektroneneinfangs*:

   $$^{55}\text{Fe} + e^- \rightarrow \ ^{55}\text{Mn} + \nu \quad \text{(2,7 Jahre)}$$

   Hier bleibt A gleich, Z wird um 1 Einheit erniedrigt.

3. der γ-Zerfall: Abregung eines Kerns, der in einem hohen internen Energiezustand ist, durch Ausstrahlung von energiereichem Licht (elektromagnetische Strahlung, genannt *Gammastrahlung*). A und Z bleiben unverändert.

2.2 Energie der Kern-Zerfälle

Woher kommt die Energie für Kern-Zerfälle?

Nach den bisherigen Überlegungen müßten alle Kerne eine ganze Zahl von Protonen (Z) und Neutronen (N) besitzen, die Kernmasse wäre dann:

$$M(A,Z) = Z \cdot m_{\mathrm{p}} + N \cdot m_{\mathrm{n}} \; ; \qquad \text{wobei} \qquad A = Z + N \; .$$

Dies ist aber nicht der Fall – das Zusammenbinden der Z Protonen und der N Neutronen geschieht mit Hilfe einer Bindungsenergie E_{B}(A,Z). Die Kernmasse $M(A,Z)$ ist um die entsprechende Masse – den sogenannten *Massendefekt* – kleiner als die Summe der Protonen- und Neutronen-Massen. Diese fehlende Masse erscheint nach $E = mc^2$ als Energie in Form der (negativen) Kernbindungsenergie, die von Z und N bzw. Z und A abhängt.

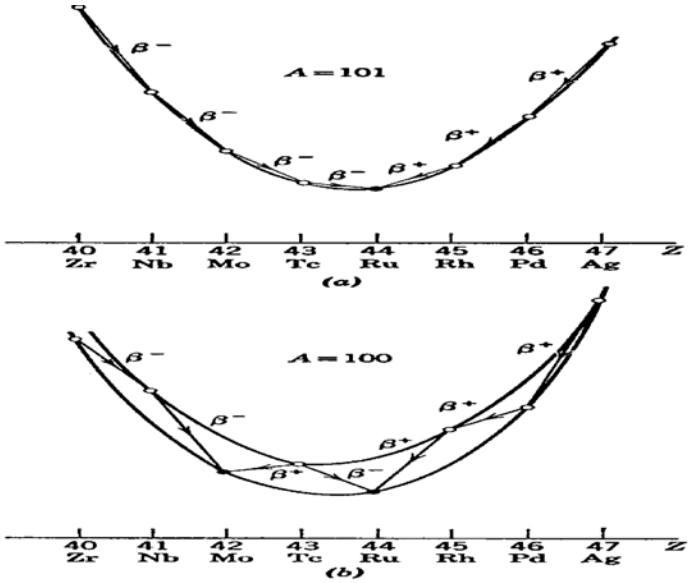


Abbildung 2.1. Kernbindungsenergie gegen Protonenzahl Z für Kerne mit der ungeraden Massenzahl $A = 101$ (oben) bzw. der geraden Massenzahl $A = 100$ (unten). Bei gerader Massenzahl unterscheiden sich die Kurven für Z, N = gerade (g,g-Kern) und Z, N = ungerade (u,u-Kern)

Für die Isotope eines gegebenen Elements hat die Bindungsenergie eine »Tal«-Form, mit den stabilen Isotopen in der »Talsole« und den instabilen, radioaktiven Isotopen beiderseits zu höheren Energien. Die Talsole hat eine unterschiedliche Tiefe für verschiedene Elemente, so daß ein Kern (»Mutterkern«) Energie abgeben kann, in dem er sich – z. B. durch Betazerfall, siehe Abb. **??** – in einen anderen Kern verwandelt (»Tochterkern«).

Der Verlauf der Bindungsenergie (pro Nukleon) E_{B}/A als Funktion der Kernmassenzahl A heißt »Bethe-Weizsäcker-Formel« (siehe Abb. **??**). Sie sagt voraus, ob man

Energie durch Kernverschmelzung (Fusion; $A < 60$) oder durch Verkleinerung eines Kerns (Kernspaltung, Alphazerfall; $A > 60$) gewinnen kann.

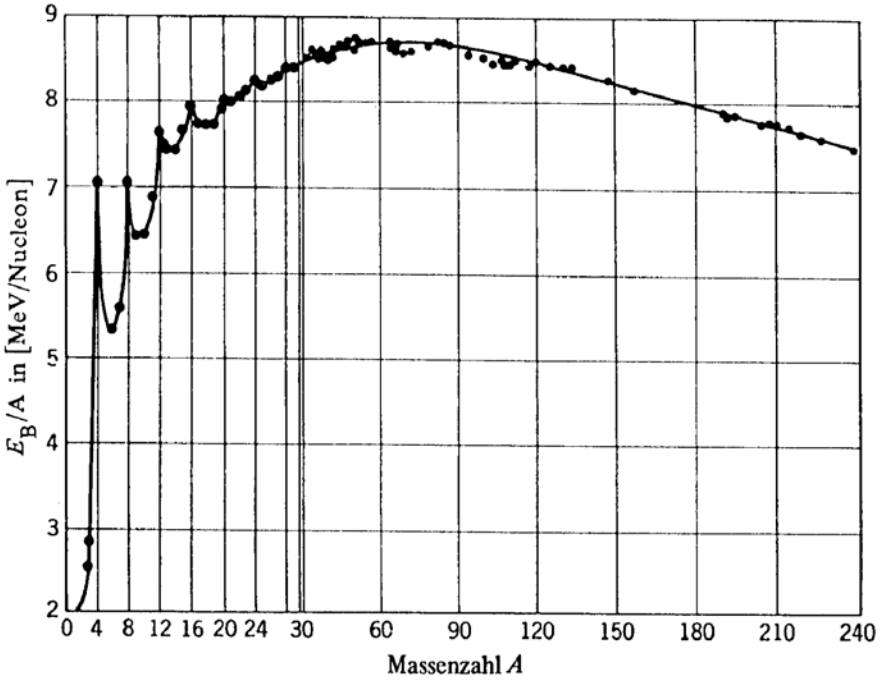


Abbildung 2.2. Bethe-Weizsäcker-Graph

2.3 Drei Gesetze der Radioaktivität

1. *das Abstandsgesetz*: die Zählrate aus einer radioaktiven Quelle nimmt umgekehrt proportional zum quadratischen Abstand ab

$$\frac{\mathrm{d}N}{\mathrm{d}t}(r) = \frac{N_0}{r^2}$$

d. h.

$$\text{Zählrate} = \frac{\text{Quellstärke } N_0}{(\text{Abstand})^2} \,.$$

Dies folgt daraus, daß sich die Strahlung gleichmäßig in alle Richtungen ausbreitet und sich dabei auf eine Kugelfläche (Fläche $= 4\pi r^2$) verteilt, so daß sie entsprechend mit wachsendem Abstand r »verdünnt« wird (am besten in einer *log-log-Darstellung* zu sehen).

2. *das Zerfallsgesetz*: die Zerfallsrate $\mathrm{d}N/\mathrm{d}t$ (Zählrate) einer Quelle ist der jeweiligen Menge $N(t)$ der *noch nicht zerfallenen* Kerne proportional:

$$\frac{\mathrm{d}N}{\mathrm{d}t}(t) = -k\,N(t)\ .$$

Diese Gleichung gilt für ein kurzes Zeitintervall $\mathrm{d}t$. Für eine beliebige Zeit muß man sie integrieren:

$$\int \frac{\mathrm{d}N}{N} = -\int k\,\mathrm{d}t \rightarrow \ln\frac{N(t)}{N(0)} = -kt$$

oder

$$N(t) = N(0)\cdot e^{-kt}\ .$$

exponentielles Zerfallsgesetz! (am besten in einer *log-lin-Darstellung* zu sehen).

3. *das Absorptionsgesetz für Gammastrahlung* (gilt auch für Licht!) hat die gleiche Form, da die in einer dünnen Schicht absorbierten Strahlung proportional der dort vorhandenen Strahlungsmenge (Intensität) ist (x = Absorberdicke):

$$\frac{\mathrm{d}N}{\mathrm{d}x} = -\mu\,N(x)$$

oder

$$N(x) = N(0)\cdot e^{-\mu x}\ .$$

(Lambert-Beer'sches Gesetz für Licht, Absorptionsgesetz für γ - Strahlung; μ heißt »Absorptionskoeffizient«).

2.4 Wechselwirkung Strahlung-Materie

Es gibt drei Arten der Wechselwirkung energiereicher Strahlung mit Materie

elastische Streuung	die Strahlung wird abgelenkt, ohne Energie an die Materie abzugeben. Beispiel: RUTHERFORD-Streuung von α-Teilchen. Sie wird verwendet, um die mikroskopische Struktur der Materie zu untersuchen (Röntgen-Streuung, Neutronenstreuung, usw.)
direkte Ionisation	α- und β-Teilchen können atomare Elektronen aus der Atomhülle schlagen; sie hinterlassen geladene Atome, d. h. Ionen. Die meisten Nachweismethoden für Strahlung basieren darauf. Die Ionisation bildet auch die Grundlage für die biologische Wirkung der Strahlung (Zerstörung chemischer Bindungen durch Ionisation benachbarter Atome).
indirekte Ionisation	γ-Strahlen wechselwirken mit der Atomhülle (Photoeffekt, Compton-Effekt) oder mit dem Kern (Paarbildung, Kern-Photoeffekt) und setzen geladene Teilchen frei, die ihrerseits weitere Ionisation hervorrufen. Neutronen lösen Kernreaktionen aus, die radioaktive Kerne produzieren und zu sekundärer Ionisation führen.

Die letzten beiden Effekte können zum Nachweis der Strahlung benutzt werden, wobei der eigentliche Nachweis letztlich immer über die Ionisation abläuft. (-ausführliche Beschreibung von Photoeffekt, Compton-Effekt, Paarbildung, Kern–Photoeffekt; Versuche zum Nachweis der Strahlung: Meßgeräte, Ionisationskammer)

$\gamma-$**Strahlen** sind

elektromagnetische Strahlung oder -Wellen (wie Radiowellen, Wärmestrahlung, Licht, UV-Strahlung...)
Sie haben drei wesentliche Eigenschaften:

1. eine hohe Energie (10 keV - GeV) (d.h. 10 000 Elektronen-Volt bis 1 000 000 000 eV);
2. sie werden von Atom*kernen* emittiert, wenn diese überschüssige Energie besitzen;
3. γ-Strahlen werden als Quanten (Energiepakete) emittiert, daher zeigen sie ein *Linien*spektrum (vgl. Röntgenstrahlen).

γ-Strahlungs-Spektrum: Anzahl N der γ-Strahlen/Zeit ("Zählrate") gegen ihre Energie:

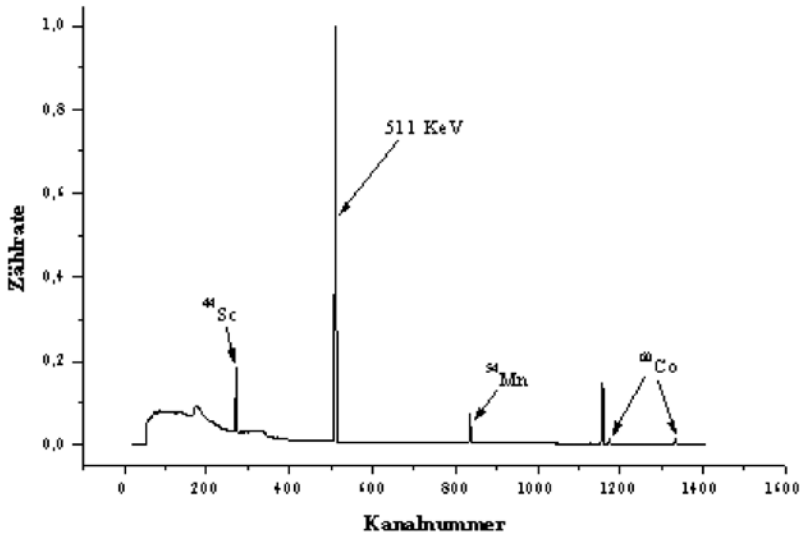


Abbildung 2.3. γ-Strahlen/Zeit oder γ-Zählrate gegen Energie. Die scharfen Linien entsprechen γ-Quanten von den angegebenen Atomkernen.

Strahlungsdetektoren

Gas-Ionisationsdetektoren für α-, β-, γ-, Rö-Strahlung

- Ionisationskammer
- Geiger-Müller-Zählrohre
- Proportionalzähler

Festkörper-Ionisationsdetektoren für γ-, Rö-Strahlung

- Halbleiterdetektoren

Szintillationsdetektoren für β-, γ-, Rö-Strahlung

- Flüssigkeits-Szintillatoren
- feste Szintillatoren (Na(Tl)J, Anthrazen, Kunststoff)
- Leuchtschirme

Abbildende Detektoren für α-, β-Strahlung; Ionen

- Nebelkammer
- Blasenkammer
- Funkenkammer

Film, Thermolumininesenz für alle Strahlungsarten

- Dosimeter

Neutronendetektoren für Neutronen

- Kernreaktionen, z.B.

$$n + {}^3He \rightarrow {}^4He + \gamma$$

2.5 Biologische Wirkung der Strahlung

Die verschiedenen Strahlungstypen haben unterschiedliche biologische Wirkungen; die Wirkung beim menschlichen Körper hängt auch davon ab, ob sich die Strahlungsquelle außerhalb oder innerhalb des Körpers befindet (Inkorporation!), sowie von der Intensität und Dauer der Bestrahlung. Den Strahlungstypen wird eine »relative biologische Wirksamkeit« (RBW) (bzw. Bewertungsfaktor q) zugeschrieben (siehe Tabelle **??**).

Die biologische Wirkung bei Inkorporation (Kontamination von Atemluft oder Nahrung, Tracer-Diagnostik, Therapie) hängt sowohl von der physikalischen Halbwertszeit $T_{H_{phys}}$ (Zeit, in der 50 % der radioaktiven Kerne zerfallen) als auch von der biologischen

Tabelle 2.1. relative biologische Wirksamkeit von verschiedenen Strahlungsarten

Strahlungstyp	RBW $\equiv q$
Röntgen-, γ-Strahlung	1
β-Strahlung (Elektronen)	1
langsame Neutronen	3
schnelle Neutronen	10
α-Teilchen (1 MeV)	10
Schwerionen	20

Halbwertszeit $T_{H_{biol}}$ (Zeit, in der 50 % des Isotopes aus dem Körper ausgeschieden wird) ab. Maßgebend ist die effektive Halbwertszeit:

$$\frac{1}{T_{H_{eff}}} = \frac{1}{T_{H_{phys}}} + \frac{1}{T_{H_{biol}}} .$$

Häufig ist die biologische Halbwertszeit viel kürzer, jedoch nicht immer (siehe z. B. ^{90}Sr !).

Strahlung von außerhalb des Körpers bezieht sich hauptsächlich auf γ- und Röntgenstrahlung, da die Teilchenstrahlungen (α, β) eine sehr kurze Reichweite haben. Sie stammt aus natürlichen Quellen (Höhenstrahlung, Zerfall von natürlichen Isotopen – ^{40}K, ^{234,235,238}U-,^{232}Th-Zerfallsketten) sowie aus medizinischer Röntgendiagnostik (wesentliche Belastungsquelle für die Gesamtbevölkerung!) und Kerntechnologie (wichtig für »beruflich strahlenexponierte Personen«, nicht für die Gesamtbevölkerung außer bei »Störfällen«).

Die biologische Wirkung von Strahlung resultiert aus der Ionisierung von Atomen und dadurch verursachte Zerstörung von chemischen Bindungen. Besonders wichtig sind Schädigungen des genetischen Materials (DNS) der Zellen, die zu Zellveränderungen (Krebs) und Genschäden (Erbkrankheiten) führen kann. Verschiedene Organe zeigen unterschiedliche Empfindlichkeiten gegenüber Strahlung; daher ist die Organdosis ein wichtiges Maß für die biologische Strahlenschäden. Siehe Tabelle **??** (aus der Strahlenschutzverordnung).

2.6 Dosimetrie

Unter »Dosimetrie« versteht man die genau definierte Bestimmung der Strahlungsmenge (Dosis), die an einem bestimmten Ort in einer gegebenen Zeit vorherrscht bzw. von einer Person (einem Tier, einer Pflanze, usw.) aufgenommen wird. Dazu definiert man Einheiten, die zur Strahlungsmessung und -kontrolle dienen. Sie basieren z. T. auf den Nachweismethoden, z. T. auf physikalischen oder biologischen Begriffen.

Die *Aktivität* ist eine rein physikalische Größe, die wir schon verwendet haben; sie sagt aus, wieviele Kerne in einer Zeiteinheit (Sekunde) zerfallen. Die *alte Einheit* entspricht der Aktivität eines Gramms vom natürlichen Radium, wie es von Marie und

Tabelle 2.2. Wichtungsfaktoren für Organdosis

	Organe und Gewebe	Wichtungsfaktoren
1.	Keimdrüsen	0,25
2.	Brust	0,15
3.	rotes Knochenmark	0,12
4.	Lunge	0,12
5.	Schilddrüse	0,03
6.	Knochenoberfläche	0,03
7.	andere Organe und Gewebe[a] Blase, oberer Dickdarm, unterer Dickdarm, Dünndarm, Gehirn, Leber, Magen, Milz, Nebenniere, Niere, Bauchspeicheldrüse, Thymus, Gebärmutter	je 0,06

[a] Zur Bestimmung des Beitrages der anderen Organe und Gewebe bei der Berechnung der effektiven Dosis ist die Teilkörperdosis für jedes der 5 am stärksten strahlenexponierten anderen Organe und Gewebe zu ermitteln. Die Strahlenexposition der übrigen Organe und Gewebe bleibt bei der Berechnung der effektiven Dosis unberücksichtigt

Pierre Curie zuerst chemisch getrennt wurde; die Einheit heißt »Curie« (Ci) und beträgt

$$1\ \mathrm{Ci} = 3{,}7 \cdot 10^{10}\ \text{Zerfälle/Sek.}$$

Die *neue (SI) Einheit* wird nach dem Entdecker der Radioaktivität, Henri Becquerel, genannt; sie lautet:

$$1\ \mathrm{Bq} = 1\ \text{Zerfall/Sek.}(1\mathrm{s}^{-1})$$

Die Aktivität kann nur indirekt mit einem geeichten Detektor in genau definierter Geometrie gemessen werden.

Die *Ionendosis I* bezieht sich auf die ionisierende Wirkung der Strahlung in Luft; sie kann mit Hilfe einer Ionisationskammer gemessen werden und ist nach dem Entdecker der Röntgenstrahlung, Conrad Röntgen, benannt: 1 R $\widehat{=}$ Strahlungsmenge, die in 1 kg trockener Luft die Ladungsmenge $2{,}58 \cdot 10^{-4}$ C freisetzt (entsprechend $1{,}6 \cdot 10^{16}$ Elektronen). Sie ist auch eine physikalische (meßtechnische) Einheit.

Die *Energiedosis* gibt an, wieviel Energie von einem Kilogramm der absorbierenden Substanz (meistens *Wasser* als Vergleichssubstanz) absorbiert wird:

$$D_{\mathrm{E}} = \frac{\text{absorbierte Strahlungsenergie}}{\text{Masse des Absorbers}}$$

oder

$$D_{\mathrm{E}} = \frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}m}$$

Die alte Einheit ist das Rad: 1 rad $\widehat{=}$ 0,01 J/kg. Die neue (SI) Einheit heißt »**G**ra**y**« (Gy), mit 1 Gy $\widehat{=}$ 1 J/kg. Die Energiedosis beschreibt die Wirkung der Strahlung auf Materie.

Die *Äquivalentdosis* beinhaltet die biologische Wirkung der Strahlungsmenge; sie ist proportional zur Energiedosis:

$$D_{\mathrm{q}} = q \cdot D_{\mathrm{E}}$$

wo q gleich dem RBW (Bewertungsfaktor) ist. Die Einheit ist die gleiche wie für D_{E} (da q dimensionslos ist), erhält jedoch einen neuen Namen, »**S**ie**v**ert« (Sv): 1 Sv $\widehat{=}$ 1 J/kg. Auch hier gibt es eine ältere Einheit (entsprechend dem Rad für Energiedosis): 1 rem $\widehat{=}$ 0,01 Sv.

2.7 Strahlenschutz

Strahlenschutz besteht hauptsächlich in der ständigen Kontrolle der Strahlenexposition von Menschen sowie der Verhinderung von unnötigen oder übergroßen Strahlenaufnahmen. Die zulässigen Strahlenexpositionen sind gesetzlich festgelegt; für nicht beruflich strahlenexponierte Personen sind sie aus der Tabelle **??** zu entnehmen.

Tabelle 2.3. zulässige Strahlenexposition (Grenzwerte) für *nicht* beruflich strahlenexponierte Personen

1.	Effektive Dosis, Teilkörperdosis für Keimdrüsen, Gebärmutter, rotes Knochenmark	0,3 mSv/Jahr
2.	Teilkörperdosis für alle Organe und Gewebe, soweit nicht unter 1 oder 3 genannt	0,9 mSv/Jahr
3.	Teilkörperdosis für Knochenoberfläche, Haut	1,8 mSv/Jahr

Für beruflich strahlenexponierte Personen ist die zulässige Dosis höher (siehe Tabelle **??**).

Tabelle 2.4. Grenzwerte für beruflich strahlenexponierte Personen [mSv/Jahr]

Körperdosis	Grenzwerte der Körperdosis für beruflich strahlenexponierte Personen im Kalenderjahr		
	Kategorie A	Kategorie B	$^1/_{10}$ Kategorie A
1. Effektive Dosis, Teilköperdosis: Keimdrüsen, Gebärmutter, rotes Knochenmark	50	15	5
2. Teilkörperdosis: Alle Organe und Gewebe, soweit nicht unter 1., 3. oder 4. genannt	150	45	15
3. Teilkörperdosis: Schilddrüse, Knochenoberfläche, Haut, soweit nicht unter 4. genannt	300	90	30
4. Teilkörperdosis: Hände, Unterarme, Füße, Unterschenkel, Knöchel, einschließlich der dazugehörigen Haut	500	150	50

Ein Teil der Strahlenexposition ist durch die natürliche »Hintergrundstrahlung« bedingt (siehe Karte in Abb. **??**).

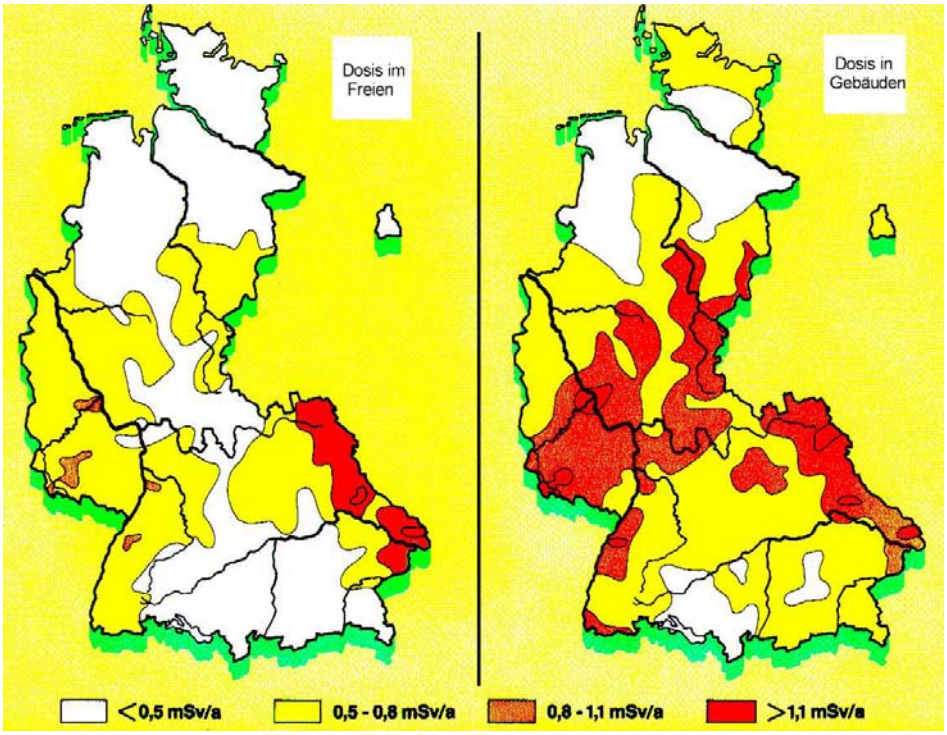


Abbildung 2.4. Strahlenexposition durch natürliche Hintergrundstrahlung; alte Bundesrepublik, mittlere Jahresdosis

Aufbau der Materie (II): Atomphysik

2.8 Quanten

Gegen Ende des letzten Jahrhunderts tauchten einige *Unstimmigkeiten* in der klassischen Physik auf, die ansonsten eine glänzende Beschreibung der Naturphänomene zu geben schien:

- die Wärmestrahlung (»Schwarzkörperstrahlung«) wurde nicht richtig beschrieben – klassische Gesetze (RAYLEIGH-JEANS, W. WIEN) ergaben *unendliche Intensitäten* oder einen *falschen Verlauf*
- die Temperaturabhängkeiten von Wärmekapazitäten $C_{\mathrm{V}}(T)$ stimmten nicht mit der klassischen Erwartung (z. B. $C_{\mathrm{V}} = fR/2$ für Gase) überein
- der licht-elektrische Effekt oder Photoeffekt zeigte ein unerklärliches Verhalten: die kinetische Energie der Photoelektronen hängt nur von der Lichtfrequenz ab, nicht von der Intensität
- die diskreten Spektrallinien der Atome konnten klassisch nicht erklärt werden.

2.8.1 Wärmestrahlung (Planck'sche Formel)

Mißt man die Spektralverteilung von Licht, das im thermischen Gleichgewicht mit Materie bei einer Temperatur T ist, findet man eine universelle Funktion $E(\nu, T)$. Dies kann durch Beobachtung der Hohlraumstrahlung ermittelt werden (siehe Abb. **??**).

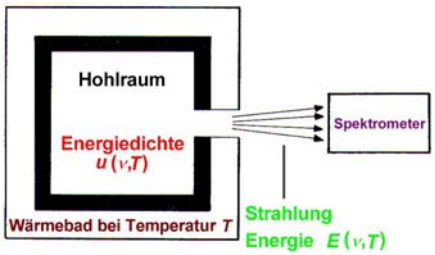


Abbildung 2.5. Hohlraumstrahlung: ein hohler Körper wird auf eine Temperatur T geheizt. Im Körperinnneren ist die Wärmestrahlung in Gleichgewicht mit den Wänden des Körpers. Diese Strahlung nimmt eine bestimmte Energieverteilung $E(\nu, T)$ an, die man durch Spektralanalyse messen kann, wenn die Strahlung durch eine kleine Öffnung im Körper beobachtet wird.

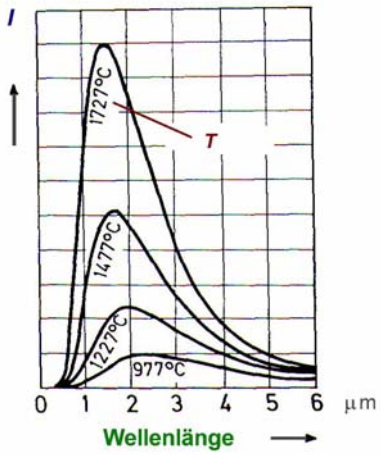


Abbildung 2.6. Spektrum der Hohlraumstrahlung: die Strahlungsintensität I gegen ihre Wellenlänge λ, gemessen bei verschiedenen Temperaturen T des Hohlraumes. Bei langen Wellenlängen gehorcht das Spektrum dem klassischen RAYLEIGH-JEANS-Gesetz (Strahlungsemission von schwingenden Dipolen). Bei kurzen Wellenlängen wird es von der Wien'schen Formel beschrieben (klassische Wärmelehre), jedoch wird das Maximum von beiden nicht richtig wiedergegeben. M. PLANCK hat die richtige Formel durch Annahme einer *Energiequantisierung* gefunden.

2.8.2 Temperaturabhängigkeit der Wärmekapazität

Nach der klassischen Wärmelehre (Gleichverteilungssatz) ist die molare Wärmekapazität C_V einer Substanz konstant und hat den Wert $C_V = fR/2$, wo f die Anzahl der Freiheitsgrade und R die molare Gaskonstante sind. In einem Festkörper ist $f = 6$ (drei Schwingungsrichtungen der Atome, mit je zwei Energieformen, E_{kin} und E_{pot}). Daher müßte die Wärmekapazität durch $C_V = 3R$ gegeben sein (Gesetz von DULONG und PETIT; siehe Abb. **??**).

In Wirklichkeit sinkt die Wärmekapazität mit sinkender Temperatur und geht gegen Null bei $T \to 0$. Dies wurde durch A. EINSTEIN und später in einem detaillierteren Modell durch P. DEBYE als Folge der Energiequantisierung erklärt: bei tiefen Temperaturen reicht die thermische Energie nicht aus, um alle Freiheitsgrade zu besetzen, da sie in diskreten Paketen (Quanten) vorkommen.

2.8.3 Photoeffekt

Die Freisetzung von Ladungen aus der Materie durch Lichteinwirkung wurde von H. HERTZ beobachtet (siehe Abb. **??**).

Später hat HALLWACHS den Photoffekt genauer untersucht (s. Abb. **??**).

Die Ergebnisse der Messungen sind in Abbildung **??** zusammengefaßt.

Diese Meßergebnisse wurden fast 20 Jahre später von EINSTEIN erklärt: er nahm an, daß das Licht nur in Form von diskreten Energiepaketen (Quanten) mit der Materie

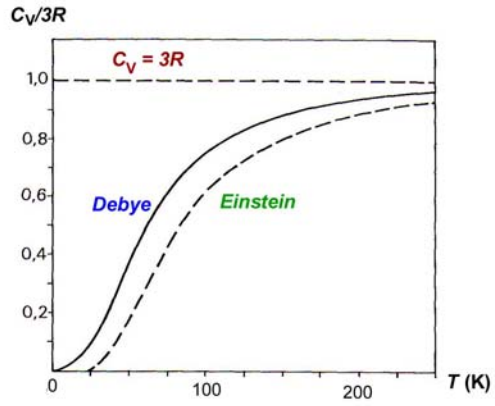


Abbildung 2.7. Wärmekapazität C_V eines Festkörpers als Funktion der Temperatur. Der klassische Wert wäre konstant bei $3R$; experimentell sinkt jedoch die Wärmekapazität mit sinkender Temperatur. Dies wurde durch Einstein und Debye mit einer Quantenhypothese erklärt (Kurven).

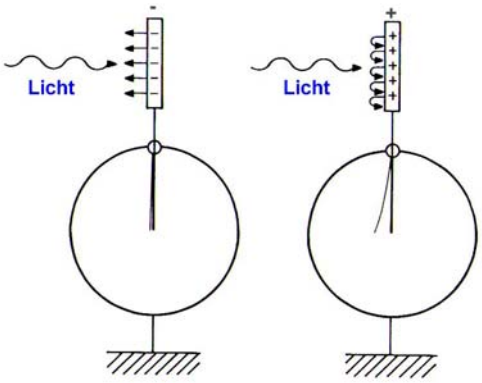


Abbildung 2.8. Photoeffekt: eine geladene Metallplatte ist mit einem Elektrometer verbunden und wird mit Licht bestrahlt. Ist die Platte negativ geladen, so entlädt sich das Elektrometer schnell (links); ist sie jedoch positiv geladen, bleibt das Elektrometer bei Lichteinstrahlung geladen (rechts). Dies zeigt, daß das Licht die Freisetzung von negativen Ladungen bewirkt; später wurden sie als Elektronen identifiziert.

wechselwirken kann.

Die Energie eines Quants ist proportional der Lichtfrequenz ν, aber eine bestimmte Minimalenergie (»Austrittsarbeit« E_φ) ist nötig, um ein Elektron aus dem Metall der Photokathode freizusetzen. Dies erklärt die Grenzfrequenz ν_{Grenz} [Teilbild a)]. Oberhalb von ν_{Grenz} bekommen die Photoelektronen eine zusätzliche kinetische Energie E_{kin} nach der Beziehung $E_{\text{kin}} = h\nu - E_\varphi$. Die Gegenspannung U_{Min}, die gerade ausreicht, um den Photostrom zu unterdrücken, entspricht dieser kinetischen Ener-

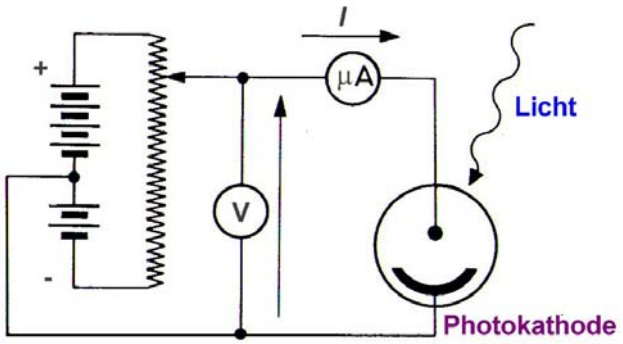


Abbildung 2.9. Apparatur zur quantitativen Messung des Photoeffektes (Hallwachs, 1888): Licht einer bekannten Frequenz und Intensität fällt auf einer Photokathode (negativgeladene Metallplatte). Die freigesetzten Elektronen werden von einer Anode aufgesammelt durch eine Spannung U und produzieren einen Strom I im externen Kreis, welcher durch ein Mikroampèremeter gemessen wird. Die Anodenspannung U kann durch ein Potentiometer (links) geregelt werden.

gie: $eU_{\mathrm{Min}} = E_{\mathrm{kin}}$ (elektrische Arbeit = Ladung · Potentialdifferenz). Die Frequenzabhängigkeit von U_{Min} ist daher gegeben durch $U_{\mathrm{Min}} = (h/e)\nu - E_\varphi/e$, d. h. linear mit Steigung h/e [Teilbild c)]. Der Sättigungsstrom I_S wird erreicht, wenn alle Photoelektronen eingesammelt werden, er entspricht der Gesamtanzahl der freigesetzten Elektronen [Teilbild b)].

Diese Zahl steigt proportional der Lichtintensität (Anzahl der Lichtquanten pro Zeit, welche die Photokathode erreichen), da jedes Quant ein Elektron freisetzen kann [Teilbild d)].

2.8.4 Atomspektren

Ab Mitte des 19. Jahrhunderts wurden Messungen der Atomspektren vorgenommen, d. h. der Frequenz- oder Wellenlängenabhängigkeit der Lichtintensität, die von energetisch-angeregten Atomen ausgestrahlt wird. Es wurde beobachtet (Fraunhofer, Bunsen), daß nur bestimmte, diskrete Frequenzen in den Spektren von einzelnen Atomtypen zu sehen sind, die sogenannten Spektrallinien, die zunächst unerklärt blieben.

Etwa 1910 ergab sich eine weitere Komplikation: nach dem Rutherford-Modell des Atoms kreisen die Elektronen um den winzigen, positiv-geladenen Atomkern. Nach der klassischen Elektrodynamik müßten diese kreisenden Elektronen (beschleunigte Ladungen!) kontinuierlich Strahlung abgeben und in den Kern fallen. Atome sind jedoch über Jahrtausende stabil, außerdem strahlen sie, wenn sie energetisch angeregt werden, nicht kontinuierliches Licht sondern ein Linienspektrum ab. Im Falle des einfachsten Atoms, des Wasserstoffs, konnte man die Lage der Spektrallinien durch eine

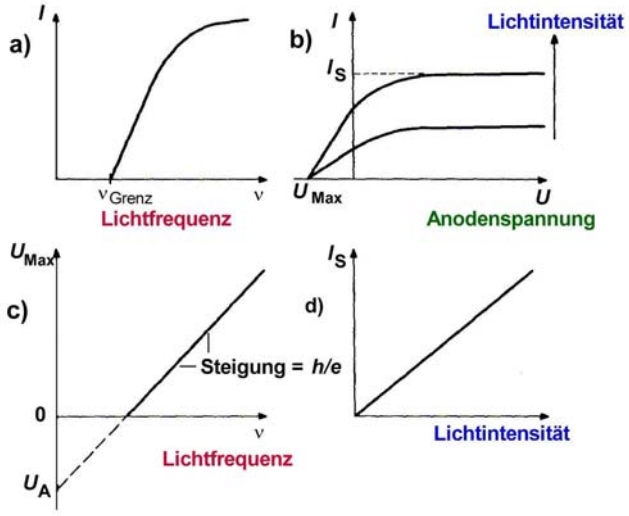


Abbildung 2.10. Ergebnisse der Messung des Photoeffektes: der Photostrom als Funktion der Lichtfrequenz ν (Teilbild a), oben links) zeigt einen Grenzwert; unterhalb der Grenzfrequenz ν_{Grenz} bleibt der Strom gleich Null, oberhalb dieser Frequenz steigt er an und erreicht einen Sättigungswert bei hohen Frequenzen. Im Teilbild b) (oben rechts) ist die Abhängigkeit des Photostromes von der Anodenspannung U gezeigt: bei einer Gegenspannung U_{Max} wird der Strom vollständig unterdrückt. Mit steigender positiver Spannung steigt der Strom bis zu einem Sättigungswert I_{S} an. Die Spannung U_{Max} ist ein Maß für die kinetische Energie der freigesetzten Elektronen. Teilbild c) (unten links) zeigt die Abhängigkeit des Schwellenwerts U_{Max} von der Lichtfrequenz: U_{Max} (und damit die kinetische Energie E_{kin} der Photoelektronen) steigt linear mit der Lichtfrequenz oberhalb des Grenzwerts ν_{Grenz} an, die Steigung der Geraden beträgt h/e (h = Planck'sches Wirkungsquantum, e = Elementarladung). Im Teilbild d) (unten rechts) ist die Abhängigkeit des Sättigungsstromes I_{S} von der Lichtintensität gezeigt: der Strom I_{S} (die Anzahl der Photoelektronen pro Zeit) steigt proportional der Lichtintensität (Lichtenergie pro Zeit und Fläche) an.

einfache Formel angeben (BALMER-Formel):

$$\nu = R_{\text{H}} \left\{ \frac{1}{n'^2} - \frac{1}{n^2} \right\} .$$

Hier ist ν die Frequenz einer Spektrallinie, R_{H} eine Naturkonstante (die RYDBERG-Konstante), n' und n sind ganze Zahlen ($n' < n$). Es ergeben sich Serien von Linien, entsprechend dem Wert von n' (siehe Abb. **??**).

BOHR versuchte, dies mit einem halb-klassischen Modell (siehe Abb. **??**) zu erklären. Er behandelte die Elektronen mit den Kepler'schen Gesetzen der Planetenbewegung, setzte aber die Stabilität gewisser Bahnen voraus .

Er konnte damit die Spektren von Wasserstoff und anderen Atomen gut erklären, und den Wert der RYDBERG-Konstante sehr genau errechnen, jedoch blieb die *Begründung* seiner Postulate aus.

Diese Widersprüche mit der klassischen Physik konnten also durch eine Quantisie-

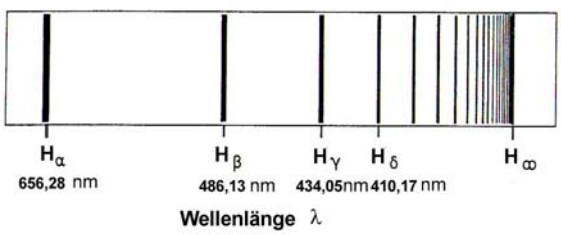


Abbildung 2.11. Wasserstoffspektrum: die Balmer-Serie (entsprechend $n' = 2$ in der Balmer-Formel; hier sind die Linien als Funktion der Wellenlänge λ aufgetragen. Werte von $n = 3$ bis $n = \infty$ geben die Linien $H_\alpha, H_\beta, \ldots H_\infty$. Oberhalb von H_∞ (»Seriengrenze«) gibt es keine Linien mehr.

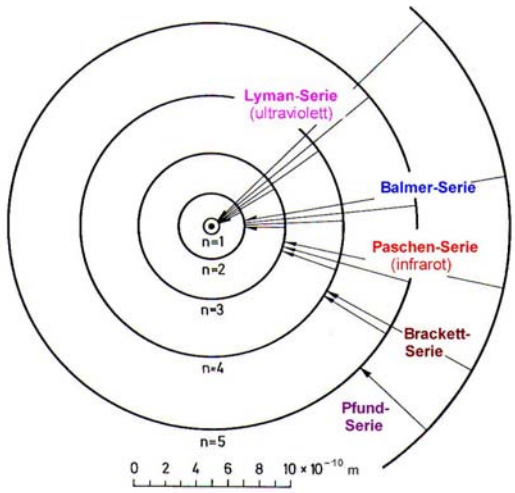


Abbildung 2.12. Bohr'sches Modell des Wasserstoff-Atoms. Die Elektronenbahnen um den Atomkern (Punkt in der Bildmitte) sind durch ihre Quantenzahl n gekennzeichnet; diese bestimmt die Energie sowie den Drehimpuls des Elektrons auf seiner Bahn. Die Spektralserien entsprechen Übergängen des Elektrons zwischen verschiedenen Bahnen; die Seriengrenze ist erreicht, wenn das Elektron gerade nicht mehr im Atom gebunden ist (Ionisationsenergie). Ein Größenmaßstab ist angegeben: die niedrigste Bahn hat einen Radius von ca. 0,05 nm (1. Bohr'scher Radius)

rung der Energie erklärt werden: Licht erscheint beispielsweise als Quanten bei der Wechselwirkung mit Materie, welche einzeln wirken, wie Teilchen, und eine Quantenenergie

$$E = h\nu$$

besitzen. G.N. Lewis nannte diese »Lichtteilchen« später *Photonen*. Die Proportionalitätskonstante h ist das »Planck'sche Wirkungsquantum«, schon aus der Beschreibung der Wärmestrahlung bekannt.

Später wurde in der modernen Quantenmechanik (Heisenberg, Schrödinger, Born, Dirac u.a.) ein selbstkonsistentes Bild der Quantisierung in Atomen gefunden. Sie basierte auf dem Welle-Teilchen-Dualismus (de Broglie); demnach haben nicht nur Wellen (Licht) einen Teilchencharakter (als Photonen), sondern auch mikroskopische *Teilchen* (z. B. Elektronen) haben einen Wellencharakter. Ihre Frequenz und Wellenlänge werden durch die de Broglie-Relationen gegeben:

$$E = h\nu \; ; \qquad p = \frac{h}{\lambda}$$

wobei E die Teilchenenergie und p sein Impuls sind. Diese Materiewellen zeigen typische Wellenerscheinungen (Beugung, Interferenz von Elektronen, Neutronen, selbst Atomen).

Eine weitere Eigenschaft der Materiewellen, die aus ihrer Wellennatur folgt, ist die Unschärfe von Energie und Zeit bzw. von Impuls und Ort. Diese Unschärfe ist bei klassischen Wellen gänzlich normal, erschien aber bei Teilchen zunächst sehr ungewöhlich. Sie besagt, daß bei gleichzeitiger Bestimmung vom Ort und Impuls eines Teilchens, beide Größen mit einer Unschärfe $\Delta x, \Delta p$ behaftet sind, wobei das Produkt der beiden Unschärfen einen Minimalwert hat:

$$\Delta x \Delta p \geq \frac{h}{4\pi} \, .$$

Dies führt zu einer Lokalisierungsenergie der Elektronen: ihr Gesamtimpuls p kann nicht kleiner als die Impulsunschärfe Δp werden, ihre kinetische Energie ist daher gegeben durch

$$E = \frac{m}{2} v^2 \equiv \frac{p^2}{2m} \geq \frac{(\Delta p)^2}{2m} \geq \frac{h^2}{[32\,\pi\, m (\Delta x)^2]} \, .$$

Das heißt, wenn man ein Elektron in einen kleinen Bereich Δx »einzusperren« versucht, daß seine Energie stark ansteigt. Diese *Lokalisierungsenergie* kommt zu den klassischen kinetischen und potentiellen Energien im Atom hinzu: sie verhindert, daß das Elektron in den Kern fällt. Sie ist auch bei der chemischen Bindung (»Delokalisierung«) wichtig.

2.9 Röntgenstrahlung

Die Röntgenstrahlung entsteht bei der Beschleunigung von Elektronen. Dies kann innerhalb eines Atoms passieren (Übergänge von Elektronen zwischen inneren Energieschalen in schweren Atomen: charakteristische Röntgenlinien). Es kann auch durch Abbremsen von schnellen, energiereichen Elektronen durch Materie geschehen (Bremsstrahlung). Im Labor und im Krankenhaus werden Röntgenstrahlen in einer Röntgenröhre erzeugt (siehe Abb. **??**), wobei beide Prozesse stattfinden.

Das Spektrum der Röntgenstrahlung aus einer solchen Röhre ist die Überlagerung eines kontinuierlichen Spektrums (Bremsstrahlung; siehe Abb. **??**) mit einem Linienspektrum (dem charakteristischen Röntgenspektrum, Linienenergien typisch für das verwendete Anodenmaterial).

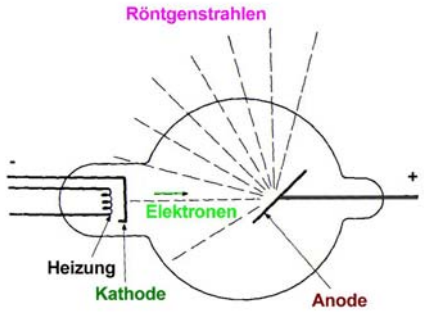


Abbildung 2.13. Röntgenröhre: eine geheizte Kathode (links) emittiert Elektronen durch thermische Emission. Diese werden durch eine hohe Anodenspannung zur Anode hin beschleunigt; dort werden sie beim Auftreffen stark gebremst und geben energiereiche Strahlung (Bremsstrahlung) ab (Maximalenergie $= eU_\mathrm{A}, U_\mathrm{A} \mathrel{\widehat{=}}$ Anodenspannung, $e =$ Elektronenladung). Durch Stoßanregung der Atome in der Anode erzeugen sie auch »Löcher« in den inneren Atomschalen, die durch andere Elektronen unter Abgabe der Spektrallinien (charakteristische Röntgenstrahlen) wieder gefüllt werden.

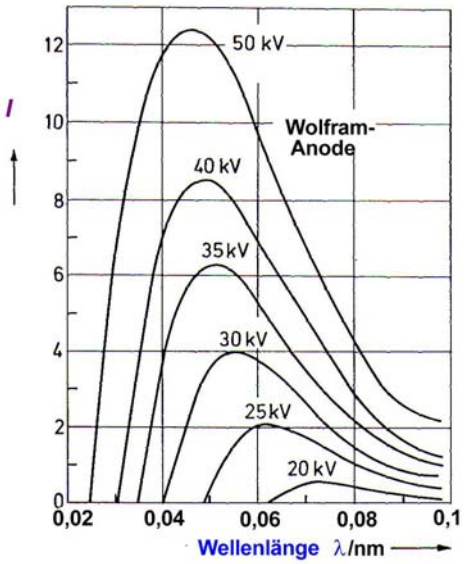


Abbildung 2.14. Bremsstrahlungs-Spektren: Röntgen-Intensität gegen Wellenlänge für Strahlung aus einer Wolfram-Anode bei verschiedenen Anodenspannungen. Die maximale Energie (minimale Wellenlänge) im Spektrum hängt von der Anodenspannung U_A ab, nach $U_\mathrm{A} = hc/e\lambda_\mathrm{Min}$ (Energieerhaltung); auch die Gesamtintensität im Röntgenspektrum steigt mit steigender Anodenspannung. Hier sind die verwendeten Anodenspannungen noch nicht hoch genug, um die charakteristischen Röntgenlinien vom Wolfram-Anodenmaterial anzuregen.

Außer in der medizinischen Diagnostik und Therapie werden Röntgenstrahlen für die Materialprüfung und -Untersuchung, insbesondere für Röntgenbeugung zur Strukturuntersuchung von Kristallgittern und Molekülen eingesetzt. Moderne bildgebende Methoden spielen eine wichtige Rolle in Diagnostik und Materialprüfung.

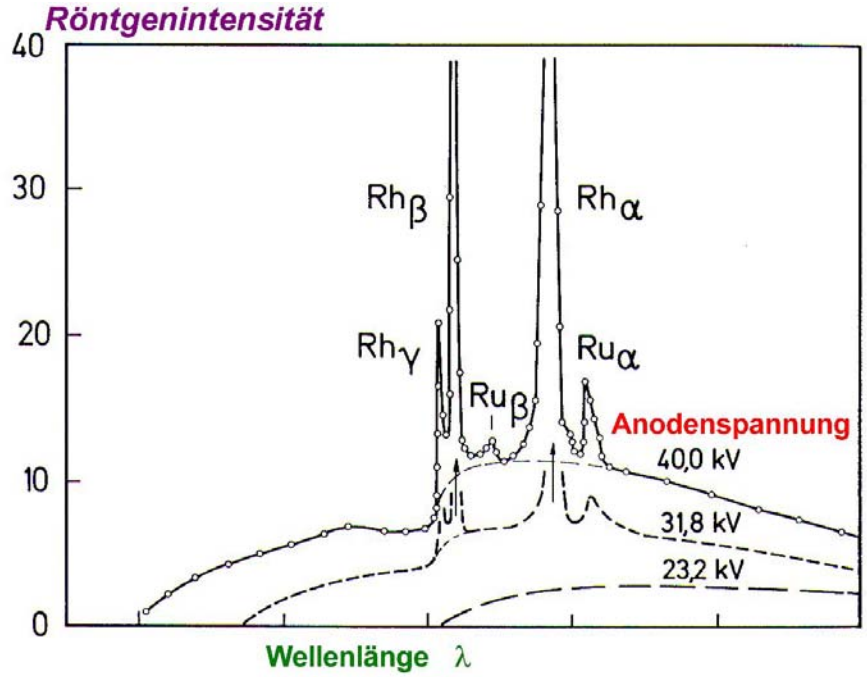


Abbildung 2.15. Das Röntgen-Spektrum aus einer Rh/Ru-Anode bei verschiedenen Anodenspannungen. In diesem Fall sind die Anodenspannungen genügend hoch, um Innerschalen-Anregungen im Anodenmaterial zu erzeugen; dadurch entstehen die charakteristischen Röntgenlinien von Ru und Rh (α, β, γ-Linien), überlagert mit dem kontinuierlichen Bremsspektrum. Bei 23,2 kV reicht die Anodenspannung zur Linienanregung noch nicht aus, nur das Bremsspektrum ist zu sehen.

3 Wärmelehre

3.1 Temperatur

In der Wärmelehre brauchen wir, zusätzlich zu den drei mechanischen Größen/Einheiten Länge (Meter), Zeit (Sekunde) und Masse (Kilogramm), auch zwei weitere: die Temperatur (»Potentialgröße der Wärme«) sowie die Stoffmenge (Molzahl n oder ν, siehe Seite **??**). Wir beginnen mit einer kurzen Chronik der Temperatur:

Tabelle 3.1. Chronik der Temperatur

1700-1720	Newton und Fahrenheit überlegen sich, wie man eine Temperaturskala festlegen kann. Fahrenheit setzt den Siedepunkt von Wasser $t_{\mathrm{sp}} = 212\,^{\circ}\mathrm{F}$ und den Eispunkt $t_{\mathrm{Ep}} = 32\,^{\circ}\mathrm{F}$, so daß der Lebensbereich der Menschen etwa von $0\,^{\circ}\mathrm{F}$ bis $100\,^{\circ}\mathrm{F}$ reicht.
1702	Amontons stellt fest, daß der Druck eines Gases mit der Temperatur steigt. Bei ca. $t = -240\,^{\circ}$ ginge der Druck gegen Null (absoluter Nullpunkt!).
1738	Bernoulli findet, daß die Temperatur in einem Gas mit dem Quadrat der mittleren Geschwindigkeit der Gasteilchen wächst: Anfang der kinetischen Gastheorie.
1742	Celsius definiert eine Temperaturskala, wonach $t_{\mathrm{Sp}} = 100\,^{\circ}\mathrm{C}$ und $t_{\mathrm{Ep}} = 0\,^{\circ}\mathrm{C}$ sind (moderne Celsiusskala).
1848	Kelvin stellt fest, daß der absolute Nullpunkt $t_{\mathrm{np}} = -273{,}15\,^{\circ}\mathrm{C}$ beträgt (durch Messungen an idealen Gasen). Dies definiert die absolute oder Kelvinskala: $T = 0$ K entspricht $t = -273{,}15\,^{\circ}\mathrm{C}$, $1\ \mathrm{K} = 1\,^{\circ}\mathrm{C}$.
1908	Heike Kammerlingh Onnes verflüssigt zum ersten Mal Helium ($T_{\mathrm{Sp}} = 4{,}2$ K): Beginn der Tieftemperaturphysik.
1911	Kammerlingh Onnes entdeckt die Supraleitung von Quecksilber: elektrischer Strom fließt ohne Widerstand.

3.2 Wärmemessungen

Der Wärmeinhalt eines Körpers ist eine eindeutige Funktion seiner Temperatur (dies läßt sich für ein ideales Gas relativ einfach aus der Mechanik sowie der Gasgleichung

ableiten: *kinetische Gastheorie*). Die Proportionalitätskonstante zwischen Wärmemenge ΔQ und Temperaturänderung ΔT heißt »Wärmekapazität« und ist eine Eigenschaft des Materials:

$$C = \frac{\Delta Q}{\Delta T} \qquad \left(\text{Einheit: } \frac{\text{J}}{\text{K}}\right) .$$

Die so definierte Wärmekapazität gilt für einen bestimmten Körper. Man definiert auch die sog. spezifische Wärmekapazität c_{m}, die auf ein Gramm der Substanz bezogen ist:

$$c_{\text{m}} = \frac{C}{m}$$

(m = Masse des Körpers in g; Einheit: J/g K) sowie die molare Wärmekapazität C_{M}, die für ein Mol der Substanz gilt:

$$C_{\text{M}} = \frac{C}{\nu}$$

(ν = Molzahl, Einheit von $C_{\text{M}} \mathrel{\widehat{=}}$ J/Mol K).

Messung der Wärmekapazität bzw. einer definierten Wärmemenge heißt »Kalorimetrie«. Sie wird mit Hilfe eines Kalorimeters durchgeführt, eines Behälters, der möglichst gut von der Umgebung isoliert ist und eine wohlbekannte eigene Wärmekapazität hat. Probe und Kalorimeter werden mit einer bekannten Wärmemenge erwärmt (elektrisch, mittels Reibung, oder aus einer chemischen Reaktion) und die Temperaturerhöhung gemessen.

Alternativ dazu wird die Probe, bei einer bekannten Anfangstemperatur, mit einer Vergleichssubstanz bei einer anderen Ausgangstemperatur in Gleichgewicht gebracht und die Endtemperatur gemessen (Mischkalorimeter; Vergleichssubstanz häufig Wasser). (C_{V} und C_{P} von Gasen s. unten)

3.3 Gase

Im Gegensatz zu Flüssigkeiten haben Gase keine Volumenelastizität. Sie ändern ihr Volumen (fast) beliebig, je nach äußerem Druck und Temperatur.

Bei gegebener Temperatur hat man folgendes Verhalten beobachtet: Druck und Volumen sind einander umgekehrt proportional, d. h. das Produkt PV bleibt konstant:

$$PV = konst. \qquad \text{(bei konstanter T)} .$$

Dies nennt man das *Gesetz von* Boyle-Mariotte; strenggenommen gilt es nur für »ideale« Gase.

Aufgrund dieses Gesetzes ist die Dichte eines Gases nicht – wie bei Flüssigkeiten – konstant, sondern proportional dem wirkenden Druck. Eine weitere Konsequenz davon ist, daß der Schweredruck nicht mit wachsender Tiefe linear ansteigt, sondern exponentiell, da die Dichte des Gases zunimmt und die Masse der darüberliegenden Schichten daher immer mehr ansteigt mit wachsender Tiefe. [barometrische Höhenformel: $P(h) = P_0\, e^{-h/H_0}$, P_0 = Druck am Boden, $P(h)$= Druck in der Höhe h, H_0 = *Skalenhöhe* $\mathrel{\widehat{=}}$ Funktion von T, g, ρ].

Außer dem *Druck* und dem *Volumen* ist eine dritte Größe für den Zustand eines Gases wichtig, nämlich die *Temperatur*. Die Temperatur spielt in der klassischen Mechanik keine Rolle, ist aber eine anschauliche Größe aufgrund des menschlichen Empfindungsvermögens dafür. Eine verwandte Größe ist die *Wärmemenge*, die als mikroskopische Bewegungsenergie der Materieteilchen angesehen werden kann und daher die Einheit [J] besitzt, wie die Energie und die Arbeit. Als makroskopische Größe ist die Wärme allerdings nicht eine Zustandsgröße, sondern – wie die Arbeit auch – eine Prozeßgröße.

3.3.1 Temperaturabhängigkeiten

Eine ganze Reihe physikalischer, chemischer, und biologischer Meßgrößen und Prozesse hängen von der Temperatur ab. Im Prinzip kann jede solche Meßgröße benutzt werden, um eine Temperaturskala festzulegen. In erster Linie verwendet man die Volumenausdehnung eines (idealen) Gases dazu, nach den *Gesetzen von* Gay-Lussac:

$$V(T) = \alpha T \qquad (P = \text{konst.})$$

und

$$P(T) = \beta T \qquad (V = \text{konst.})\ .$$

Die praktische Temperaturskala wird durch zwei Fixpunkte definiert, und zwar sind dies der Gefrierpunkt sowie der Siedepunkt von reinem Wasser bei Normaldruck. Die Celsiusskala setzt den Gefrierpunkt gleich 0 °C, den Siedepunkt gleich 100 °C, und teilt die dazwischenliegenden Temperaturen in 100 gleiche Einheiten (»Grad Celsius«). Die absolute Temperaturskala geht von der selben Einheit aus, nennt sie aber »1 Kelvin« und setzt den Nullpunkt dort an, wo ein ideales Gas nach Gay-Lussac »verschwinden« würde, d. h. wo $P(T) = 0$ wird. Dieser absoluter Nullpunkt liegt bei $-273{,}15\,^\circ\text{C}$ aufgrund des Koeffizienten β, der den Wert $1/273{,}15$ pro °C hat.

3.3.2 Das allgemeine Gasgesetz

Die Kombination der beiden Gesetze von Gay-Lussac mit dem Gesetz von Boyle-Mariotte gibt den Zusammenhang der drei Zustandsgrößen Druck, Volumen, und Temperatur für ein ideales Gas, die sog. *allgemeine Gasgleichung*:

$$PV = K_0 T$$

(K_0 eine Konstante, proportional der Gasmenge). Die Konstante K_0 teilt man üblicherweise in einen Faktor ν, der die Stoffmenge (Molzahl) angibt, sowie einen Faktor R, die allgemeine Gaskonstante, die als Naturkonstante die Proportionalität zwischen Energie (PV, Volumenarbeit zum »Zusammensetzen« des Gases) und Temperatur angibt. Sie hat die Einheit

$$[R] = \frac{\text{J}}{\text{Mol Kelvin}}$$

und den Wert 8.314 J/mol K . Damit ergibt sich die übliche Schreibweise der Gasgleichung:

$$PV = \nu\, RT$$

wobei der Druck in N/m^2, das Volumen in m^3, und die Temperatur in K gemessen werden.

Andere Meßmethoden für die Temperatur (Thermometrie) basieren auf mechanischen (Längen- oder Volumenausdehnung), elektrischen (Änderung des elektrischen Widerstandes, Thermospannung) oder optischen (Wärmestrahlung) Eigenschaften der Materie.

3.3.3 Ideales Gas

Wir haben gesehen, daß ein sogenanntes »ideales Gas« durch die Zustandsgleichung

$$PV = \nu RT \tag{3.1}$$

beschrieben wird; wir wollen nun verstehen, welcher physikalische Hintergrund zu dieser Gleichung führt und wie man ein Gas mikroskopisch vorzustellen hat. Wir betrachten ein ein-atomiges Gas (d. h. hier: ein Gas, das aus nur *einem* Atom besteht!!). Es befindet sich in einem Behälter des Volumens V (V = Endfläche $A \cdot$ Länge l) und bewegt sich in Längs-($+y$)-Richtung mit der Geschwindigkeit $+v_y$ auf eine Wand zu: Erreicht das Atom die Endwand, so stößt es elastisch mit der Wand und wird »re-

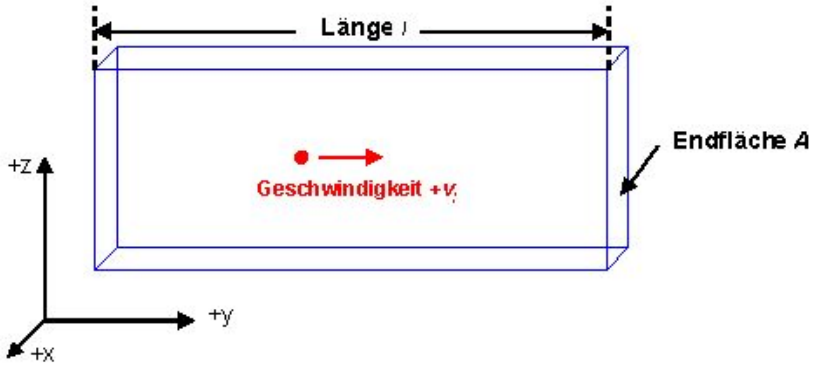


Abbildung 3.1.

flektiert«, bewegt sich also nach dem Stoß in $-y$-Richtung mit der Geschwindigkeit $-v_y$. Dabei bleibt seine kinetische Energie konstant, der *Impuls* ändert sich jedoch um den Betrag $\Delta p_y = 2mv_y$, wo m die Masse des Atoms ist (dies ist der auf die rechte Wand übertragene Impuls). Nach der Zeit $\Delta t = 2l/v_y$ kehrt das Atom, das inzwischen von der gegenüberliegenden (linken) Wand nochmals reflektiert wurde, wieder an die rechte Wand zurück und der Vorgang wiederholt sich; d. h. es wird ständig Impuls an

die Wand übertragen, wobei

$$\frac{\Delta p_y}{\Delta t} = \frac{2\, m v_y}{\frac{2l}{v_y}} = \frac{m v_y^2}{l} \; .$$

Nach NEWTON ist aber eine zeitliche Impulsänderung gleich einer Kraft,

$$\frac{\Delta p_y}{\Delta t} = F_y \; ;$$

die wiederholten Stöße des Atoms mit der Wand erzeugen eine Kraft F_y auf die Endwand (nach außen). Dies ist der Ursprung des Gasdrucks P, wobei Druck = Kraft/Fläche:

$$P = \frac{F_y}{A} = \frac{m v_y^2}{lA} = \frac{m v_y^2}{V} \; .$$

Wir erhalten also für das Produkt PV:

$$PV = m v_y^2 = 2\, E_{\mathrm{kin},y} \; .$$

In einem wirklichen Gas haben die Atome Geschwindigkeiten nicht nur bei einem festen Wert $\pm v_y$; die Geschwindigkeiten sind vielmehr verteilt über die Raumrichtungen x, y, z und über einen großen Bereich von Geschwindigkeitsbeträgen (MAXWELL-BOLTZMANN-Verteilung). Außerdem hat ein wirkliches Gas viele Atome (Anzahl $N = \nu\, N_{\mathrm{A}}$, mit ν = Molzahl und N_{A} = Avogadro'scher Zahl).

Wir müssen daher die rechte Seite der obigen Gleichung mit N multiplizieren und $E_{\mathrm{kin,y}}$ durch die gesamte mittlere kinetische Energie $< E_{\mathrm{kin}} >$ ersetzen.

Da alle Raumrichtungen äquivalent sind, verteilt sich die Energie gleichmäßig über die drei Richtungen (»Gleichverteilungssatz«): es gilt

$$< E_{\mathrm{kin}} > = < E_{\mathrm{kin,x}} > + < E_{\mathrm{kin,y}} > + < E_{\mathrm{kin,z}} >$$

und

$$< E_{\mathrm{kin,x}} > = < E_{\mathrm{kin,y}} > = < E_{\mathrm{kin,z}} >$$

d. h.

$$< E_{\mathrm{kin}} > = \frac{m}{2} < v^2 > = 3 < E_{\mathrm{kin,y}} > \; .$$

($< v^2 >$ = mittlere quadratische Geschwindigkeit aller N Gasatome). Wir haben dann schließlich für PV in einem wirklichen Gas:

$$PV = \frac{2}{3} N \; < E_{\mathrm{kin}} > = \frac{2}{3} U \tag{3.2}$$

wobei $U = N \; < E_{\mathrm{kin}} >$ die innere Energie (gesamte kinetische Energie aller Atome) des Gases ist. Der Faktor 3 kommt von den 3 Raumrichtungen der Bewegung; er heißt »Anzahl der Freiheitsgrade« f. Für molekulare Gase mit inneren Freiheitsgraden (Rotation, Schwingungen) wird $f > 3$. Wir sehen, daß das Produkt PV proportional der inneren Energie des Gases und daher ein Maß für seine Gesamtenergie ist. Gleichung

(**??**) verbindet die makroskopische Größe PV mit der mikroskopischen Größe $< E_{\rm kin} >$. Setzen wir nun die Gasgleichung (**??**) für PV ein, so erhalten wir

$$\nu\, R\, T = \frac{2}{f}\, N < E_{\rm kin} >$$

oder

$$< E_{\rm kin} >= \frac{f}{2}\frac{R}{N_{\rm A}}\, T = \frac{f}{2} kT$$

wo $k = R/N_{\rm A} \mathrel{\widehat{=}}$ Gaskonstante/Teilchen als »Boltzmann-Konstante« bekannt ist und wir uns auf ein Mol des Gases ($N = N_{\rm A}, \nu = 1$) festgelegt haben. Die Gasteilchen haben eine mittlere kinetische Energie von $kT/2$ pro Freiheitsgrad. Die innere Energie des Gases/Mol ($\nu = 1$) ist dann:

$$U \equiv N < E_{\rm kin} >= N_{\rm A} \frac{f}{2}\, k\, T = \frac{f}{2}\, R\, T\ .$$

Sie hängt nur von der Temperatur T ab.

3.3.4 Erster Hauptsatz der Wärmelehre

Eine Änderung der inneren Energie kann nach dem 1. Hauptsatz der Wärmelehre durch Arbeit, durch Wärmeaustausch, oder durch beides produziert werden:

$$\mathrm{d}U = \delta Q + \delta W = \delta Q - P\mathrm{d}V\ .$$

(δW für ein Gas $\mathrel{\widehat{=}}$ Volumenarbeit $= -P\mathrm{d}V$).

Die molare Wärmekapazität $C_{\rm V}$ (bei konstantem Volumen, $\mathrm{d}V = 0$) des idealen Gases ist gegeben durch

$$C_{\rm V} = \frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}T}(V = \text{konst.}) = \frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}T} = \frac{f}{2}\, R\ .$$

Die molare Wärmekapazität bei konstantem Druck, $C_{\rm P}$, ist größer, da Arbeit gegen die Außenwelt (Ausdehnung des Gases bei konstantem Druck P) geleistet werden muß:

$$C_{\rm P} = \frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}T} + \frac{P\mathrm{d}V}{\mathrm{d}T} = \frac{fR}{2} + \frac{P(R\mathrm{d}T)}{P\mathrm{d}T} = \frac{fR}{2} + R$$

(wobei für $\mathrm{d}V$ die Gasgleichung benutzt wurde); d. h. es gilt

$$C_{\rm P} = C_{\rm V} + R\ .$$

3.4 Entropie

Der Begriff »Entropie« geht auf den französischen Ingenieur S. Carnot sowie den deutschen Physiker R. Clausius zurück. Sie untersuchten den Wirkungsgrad von Wärmekraftmaschinen (z. B. Dampfmaschinen) und erfanden dabei ein Maß für die »Güte« eines Wärmebades (z. B. Dampfkessel). Wenn eine Wärmemenge ΔQ bei einer

festen Temperatur T reversibel übertragen wird, lautet dieses Maß (»Entropieänderung ΔS«):

$$\Delta S = \frac{\Delta Q_{\text{rev}}}{T} \ .$$

Dabei ist »reversibel« ein Idealitätsbegriff, wie » reibungsfrei« in der Mechanik – er bedeutet, der Vorgang läuft immer fast bei Gleichgewicht und könnte jederzeit umgekehrt werden. Bei nicht-reversiblen Vorgängen (die Regel in der realen Welt) lautet die Formel:

$$\Delta S \geq \frac{\Delta Q_{\text{rev}}}{T}$$

d. h. die Entropie bleibt entweder gleich (bei reversiblen, adiabatischen Vorgängen) oder sie nimmt zu.

3.4.1 Zweiter Hauptsatz der Wärmelehre

Dies ist der Inhalt des 2. Hauptsatzes der Wärmelehre:

> Die Entropie in einem abgeschlossenen System bleibt entweder gleich (wenn alle ablaufenden Prozesse reversibel sind) oder sie nimmt zu.

Die Entropie ist eine thermodynamische Zustandsfunktion und hat die Einheit

$$[\mathrm{S}] = \frac{[\mathrm{Q}]}{[\mathrm{Mol}]\,[\mathrm{T}]} = \frac{\mathrm{J}}{\mathrm{mol\,K}}$$

(wie eine Wärmekapazität).

Später hat L. Boltzmann eine statistische Interpretation der Entropie eingeführt: sie verbindet die Entropieänderung ΔS mit der relativen Wahrscheinlichkeit der Anfangs- und Endzustände, und zwar *logarithmisch* (da sich Wahrscheinlichkeiten *multiplikativ*, Entropien aber *additiv* kombinieren):

$$\Delta S_{1\to 2} = -R \ln \left[\frac{w_1}{w_2}\right] \ .$$

Die Entropie ist demnach ein Maß für die Wahrscheinlichkeit des Zustands, oder aber auch ein Maß für die *Ordnung* des Zustands (da geordnete Zustände weniger wahrscheinlich sind).

Eine noch allgemeinere Interpretation kam in den 30er Jahren aus der Informationstheorie (Shannon, Jaynes). Dort ist die Entropie ein Maß für den (fehlenden) Informationsgehalt einer Messung; die Entropie S_{M} einer Messung M mit möglichen Meßwerten m, die mit Wahrscheinlichkeit w_{m} beobachtet werden, ist gegeben durch:

$$S_{\mathrm{M}} = -R \sum_{\mathrm{m}} w_{\mathrm{m}} \ln[w_{\mathrm{m}}] \ .$$

Sie gibt also die *Unsicherheit* oder fehlende *Information* des Zustands an.

3.4.2 Beispiele für Entropieänderungen

Beispiel: adiabatische Ausdehnung des idealen Gases
Wir berechnen zunächst die *molare Entropie* eines *idealen Gases*. Umschreiben des 1. Hauptsatzes (für ein Gas) ergibt:

$$\delta Q = \mathrm{d}U + P\mathrm{d}V$$

und damit

$$\mathrm{d}S = \frac{\delta Q}{T} = \frac{\mathrm{d}U}{T} + \frac{P\mathrm{d}V}{T} \ .$$

Einsetzen des gaskinetischen Ausdrucks $\mathrm{d}U = f/2\, R\, \mathrm{d}T$ sowie Verwendung der allgemeinen Gasgleichung für $P, P = RT/V$, ergibt:

$$\mathrm{d}S = \frac{f}{2}\, R\, \frac{\mathrm{d}T}{T} + R\frac{\mathrm{d}V}{V} = \frac{f}{2} R\mathrm{d}\ln[T] + R\mathrm{d}\ln[V] \ .$$

Die Entropieänderung $\Delta S_{1\to 2}$ bei der Zustandsänderung von Zustand 1 zu Zustand 2 (mit $T = T_1$ bzw. T_2, $V = V_1$ bzw. V_2) erhalten wir durch Integrieren:

$$\Delta S_{1\to 2} = R\left\{\frac{f}{2}\ln\left[\frac{T_2}{T_1}\right] + \ln\left[\frac{V_2}{V_1}\right]\right\} \ . \tag{3.3}$$

Wir betrachten nun zwei solcher Prozesse: die reversible und die irreversible Ausdehnung eines idealen Gases, ohne Wärmeaustausch mit der Umgebung (adiabatische Prozesse), siehe Tabelle **??**.

(Tafelbild: zwei Kästchen je mit Volumen V, mit je 1 Mol eines idealen Gases in der linken Hälfte (Volumen $V_1 = V/2$) bei der Temperatur T_1. Beide Kästchen sind wärmeisoliert, beide enthalten Vakuum in der rechten Hälfte. Eines hat als Trennwand eine Berstscheibe, das andere hat einen reibungsfrei verschiebbaren Kolben. Platzen der Berstscheibe erlaubt irreversible Ausdehnung des Gases, langsames Herauslassen des Kolbens gegen äußere Kraft erlaubt reversible Ausdehnung.)

Tabelle 3.2.

Größe	reversible Ausdehnung	irreversible Ausdehnung
Arbeit δW	$= -P\mathrm{d}V$	$= 0$ (keine Arbeit gegen Vakuum!)
Wärme δQ	$= 0$ (adiabatisch!)	$= 0$ (adiabatisch!)
Energie $\mathrm{d}U$	$= -P\mathrm{d}V$; T sinkt $\to T_2$![a]	$= 0$; T bleibt konstant bei T_1!
Entropie $\mathrm{d}S$	$= \delta Q_{\mathrm{rev}}/T = 0$	$\mathrm{d}S > \delta Q/T > 0$![b]

[a] T_2 berechnen durch Einsetzen von $\mathrm{d}U = f/2\, R\, \mathrm{d}T$ und $P\, \mathrm{d}V = RT\, \mathrm{d}V/V$, dann Integration zwischen V_1 und $2V_1 = V$ entspr. T_1 und T_2.

[b] ΔS berechnen mit Gl. (**??**), oder mit der Boltzmann-Formel, oder durch Erwärmen des Zustandes nach der reversiblen Ausdehnung auf die Temperatur T_1.

3.4.3 Einzelprozesse

Wir betrachten Prozesse in einem idealen Gas, wobei die Zustandsgrößen P, V, und/oder T sich bei Konstanthaltung einer externen Bedingung ändern.

1. Der *isotherme* Prozess: die *Temperatur* T wird konstantgehalten. Es gilt das Gesetz von Boyle-Mariotte, $PV = \text{konst.} = RT$ (1 Mol). Eine Arbeit wird geleistet, $\delta W = -P\mathrm{d}V$. Integration zwischen dem Anfangs- und dem Endvolumen ergibt

$$\Delta W = -RT \ln \left[\frac{V_A}{V_\mathrm{B}}\right] .$$

   Um T konstant zu halten, muß eine Wärmemenge ΔQ übertragen werden; da aber $\Delta U = 0$ (T konstant!), ist $\Delta Q = -\Delta W = RT \ln[V_A/V_\mathrm{B}]$. Bei einem reversiblen Prozess ist dann die Entropieänderung gegeben durch

$$\Delta S = \frac{\Delta Q}{T} = R \ln \left[\frac{V_A}{V_\mathrm{B}}\right]$$

   (bei konstanter T).

2. Der *isobare* Prozess: der *Druck* P wird konstantgehalten. Die Arbeit ist dann einfach $\Delta W = -P\Delta V$. Die übertragene Wärmemenge ist gegeben durch $\delta Q = C_\mathrm{P}\mathrm{d}T$, die Änderung der inneren Energie durch $\mathrm{d}U = C_\mathrm{V}\mathrm{d}T$. *Beispiel*: C_P-Messung. Der 1. Hauptsatz ist mit dem 1. Gay-Lussac'schen Gesetz identisch:

$$R\mathrm{d}T = P\mathrm{d}V \qquad (P = \text{konst.}) .$$

3. Der *isochore* Prozess: das *Volumen* V wird konstantgehalten. Hier wird keine Arbeit geleistet, der 1. Hauptsatz lautet einfach $\mathrm{d}U = \delta Q$, oder $C_\mathrm{V} = \mathrm{d}U/\mathrm{d}T$ ($= f/2R$ beim idealen Gas). Beispiel: C_V-Messung. Das 2. Gay-Lussac'sche Gesetz gilt: $\mathrm{d}U = f/2\, R\mathrm{d}T = f/2\, V\mathrm{d}P$ (V = konst.).

4. *Adiabatische* Prozesse: es wird keine Wärme übertragen, $\delta Q = 0$. Hier ist die Ausführung des Prozesses (reversibel/irreversibel) entscheidend; beim reversiblen adiabatischen Prozess ist die Entropie konstant, $\mathrm{d}S = 0$, aber die innere Energie U ändert sich ($\mathrm{d}U = \delta W$). Beim vollständig irreversiblen Prozess gibt es immer eine Entropieproduktion, $\mathrm{d}S > 0$, jedoch keine Arbeit, U und T bleiben dann konstant.

3.4.4 Kreisprozesse

Kreisprozesse sind (z. T. idealisierte) thermodynamische Zyklen, bestehend aus mehreren Einzelprozessen, die zum Ausgangszustand zurückführen.

Der *Carnot'sche Kreisprozess* hat den höchsten Wirkungsgrad. Er besteht aus zwei Isothermen (T = konst.) und zwei Adiabaten ($\delta Q = 0$). Die Einzelprozesse werden

vollständig reversibel durchgeführt. Als Arbeitssubstanz nimmt man sinnvollerweise ein Mol eines idealen Gases (nicht nötig, aber zweckmäßig, da die Zustandsgleichung einfach und exakt bekannt ist: die allgemeine Gasgleichung: $PV = RT$).

Die »Carnotmaschine« läßt sich in einem P-V-Diagramm darstellen; die *Nettoarbeit* ist dann die Fläche innerhalb der geschlossenen Kurve, die von den beiden Isothermen (rot, blau) und den beiden Adiabaten (grün) eingegrenzt wird (da $\delta W = -P\mathrm{d}V$). Man kann auch ein entsprechendes T-S-Diagramm zeichnen, die Nettowärme ist hier gegeben durch die eingeschlossene Fläche (da $\delta Q = T\mathrm{d}S$).

Bei der Carnotmaschine hat das T-S-Diagramm die einfache Form eines Rechtecks (T = konst. bei den Isothermen, S = konst. bei den Adiabaten). Die Form des P-V-Diagramms ist durch die Gasgesetze gegeben (PV = konst. bei den Isothermen, PV^κ = konst. bei den Adiabaten, wo $\kappa \;\widehat{=}\;$ Adiabatenexponent $(f+2)/f$ wobei f = Anzahl der Freiheitsgrade):

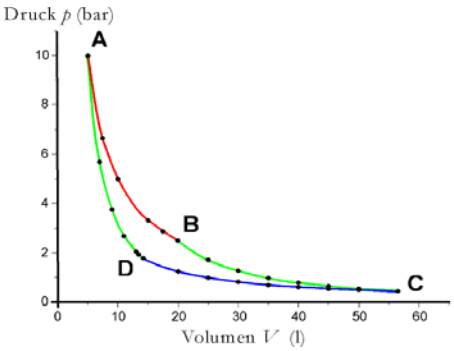


Abbildung 3.2. $P-V-$Diagramm

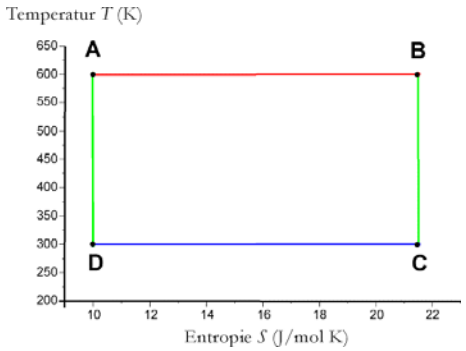


Abbildung 3.3. $T-S-$Diagramm

Bei den Isothermen (z. B. isotherme Ausdehnung des idealen Gases vom Anfangszustand $[P_A, V_A]$ bis zum Zwischenzustand $[P_\mathrm{B}, V_\mathrm{B}]$ mit $T = T_1 =$ konst., wobei $P_A V_A = P_\mathrm{B} V_\mathrm{B}$) gelten folgende Bedingungen:

$$\mathrm{d}U = 0 \qquad (\text{innere Energie} = \frac{f}{2} RT = \text{konst.})$$

und

$$\delta W = -\delta Q = -P\mathrm{d}V = -RT\frac{\mathrm{d}V}{V} \,.$$

Bei den Adiabaten (z. B. adiabatische Ausdehnung des idealen Gases vom Zustand $[P_\mathrm{B}, V_\mathrm{B}]$ bei $T = T_1$ zum Zustand $[P_\mathrm{C}, V_\mathrm{C}]$ bei $T = T_2$, mit $T_1 > T_2$) gilt:

$$\delta Q = 0, \;\; \delta W = \mathrm{d}U = \frac{f}{2} R\mathrm{d}T \,.$$

Integration der Gleichungen $\delta W = \mathrm{d}U$ für die Adiabaten zeigt, daß $\Delta W_\mathrm{BC} = -\Delta W_\mathrm{DA}$ (da ΔT umgekehrt gleich ist für beide), sowie daß

$$\frac{V_A}{V_D} = \frac{V_\mathrm{B}}{V_\mathrm{C}} \tag{3.4}$$

gelten muß. Damit folgt für die Arbeiten bei den Isothermen:

$$\frac{\Delta W_{\mathrm{AB}}}{T_1} = \frac{-\Delta W_{\mathrm{CD}}}{T_2} \tag{3.5}$$

und daraus

$$\frac{-\Delta Q_{\mathrm{AB}}}{T_1} = \frac{-\Delta Q_1}{T_1} = \frac{\Delta Q_{\mathrm{CD}}}{T_2} = \frac{\Delta Q_2}{T_2} \; . \tag{3.6}$$

ΔQ_1 ist hier die im 1. Einzelprozess (der isothermen Ausdehnung bei T_1) aufgenommene Wärme, ΔQ_2 die im 3. Einzelprozess (der isothermen Kompression bei T_2) abgegebene Wärme (»Abwärme«). Die innere Energie ändert sich nach einem gesamten Zyklus nicht ($\Delta U_{\mathrm{AB}} = \Delta U_{\mathrm{CD}} = 0$ und $\Delta U_{\mathrm{BC}} = -\Delta U_{\mathrm{DA}}$ – dies muß so sein, da die Energie eine *Zustandsfunktion* ist!).

Eine weitere Größe, der Quotient $\Delta Q/T$, ändert sich auch nicht – sie ist Null bei den Adiabaten und umgekehrt gleich bei den Isothermen (s.o.). Sie ist daher auch eine Zustandsfunktion und wird Entropie S genannt. Es gilt:

$$\Delta S = \frac{\Delta Q_{\mathrm{rev}}}{T} \qquad \text{(bei reversiblen Prozessen)} \; .$$

Für den Wirkungsgrad η des gesamten Zyklus haben wir

$$\eta = \frac{[\text{netto geleistete Arbeit}]}{[\text{aufgenommene Wärme}]}$$

(die Abwärme zählt nicht, da sie im Prozess nicht weiter genutzt werden kann). Somit ist

$$\eta = \frac{[\Delta W_{\mathrm{CD}} + \Delta W_{\mathrm{AB}}]}{\Delta Q_1} = \frac{[\Delta Q_1 + \Delta Q_2]}{\Delta Q_1} \tag{3.7}$$

oder, aufgrund von (**??**) auf Seite **??**,

$$\eta = \frac{[T_1 - T_2]}{T_1} \; .$$

Dieser Wirkungsgrad ist immer ≤ 1, er kann nur 1 werden (100 % der Wärme in Arbeit umgewandelt), wenn $T_2 = 0$ (absoluter Nullpunkt!).

3.5 Entropie und freie Energien

Weitere Beispiele für Entropieänderungen

Wir haben als Beispiel einer Entropieänderung die Ausdehnung eines idealen Gases betrachtet und dabei gesehen, daß man die Entropieänderung bei der adiabatischen, irreversiblen Ausdehnung mit Hilfe der Boltzmann-Formel als Funktion der relativen Wahrscheinlichkeit bzw. der Unordnung – in diesem Falle einfach proportional dem Volumen des jeweiligen Zustandes – angeben kann:

$$\Delta S = \nu \, R \ln \left[\frac{V_2}{V_1} \right] \; .$$

Man kann sich einen Behälter vom Volumen $2\,V_0$ vorstellen, durch eine verschiebbare Trennwand in zwei Hälften getrennt. Falls jede Hälfte das gleiche Gas bei gleicher Temperatur und gleichem Druck enthält, dann ändert sich gar nichts, wenn die Trennwand entfernt wird – es findet zwar eine Durchmischung der Teilchen statt, diese ist aber nicht nachweisbar, da sie alle gleich sind. Sind jedoch zwei verschiedene Gase in beiden Hälften (z. B. N_2, O_2), findet bei Entfernung der Trennwand eine echte Durchmischung statt; die Unordnung (und daher die Entropie) steigt. Das Gas in jeder Hälfte erfährt eine Verdopplung des ihm verfügbaren Volumens. Wenn jede Hälfte ein Mol des jeweiligen Gases enthält, ist die gesamte Entropieänderung gleich

$$\Delta S = 2\,R \ln[2]\,.$$

Dies nennt man Mischungsentropie.

3.5.1 Weitere Zustandsgrößen

Es ist oft nützlich, außer der inneren Energie U und der Entropie S einige weitere Zustandsfunktionen zu definieren. Die innere Energie ist die passende Größe, um den Energiegehalt eines Systems bei Prozessen mit konstantem Volumen anzugeben, da

$$\mathrm{d}U = \delta Q - P\mathrm{d}V,$$

d. h. bei V = konst. gilt $\mathrm{d}\,U = \delta Q$; so z. B. läßt sich für die Wärmekapazität C_V schreiben: $C_\mathrm{V} = \delta Q/\mathrm{d}T$ (V = konst.) oder $C_\mathrm{V} = \mathrm{d}U/\mathrm{d}T$.

Wenn aber der Druck P konstant gehalten wird (häufige Bedingung bei chemischen Reaktionen), dann ist eine neue Größe eher passend – die *Enthalpie* oder »freie Wärme«:

$$H = U + PV \qquad \text{bzw.} \qquad \mathrm{d}H = \mathrm{d}U + P\mathrm{d}V + V\mathrm{d}P\,.$$

Damit ist

$$\mathrm{d}H = (\delta Q - P\mathrm{d}V) + P\mathrm{d}V + V\mathrm{d}P = \delta Q + V\mathrm{d}P\,,$$

d. h.

$$\mathrm{d}H = \delta Q \qquad (\text{wenn } P = \text{konst.})\,.$$

Für die entsprechende Wärmekapazität C_P haben wir dann:

$$C_\mathrm{P} = \frac{\delta Q}{\mathrm{d}T} \qquad (P = \text{konst.}) \qquad \text{oder} \qquad C_\mathrm{P} = \frac{\mathrm{d}H}{\mathrm{d}T}\,.$$

Nun stellen wir die Frage: »Welche Prozesse laufen spontan ab?« Wir wissen, daß alle Systeme den Zustand niedrigster Energie anstreben; ein Stein rollt spontan bergab, bis er aufgehalten wird oder in der Talsole zur Ruhe kommt: d. h. die Energie wird minimiert. Gleichzeitig streben aber alle Systeme den Zustand maximaler Entropie an – die Unordnung nimmt spontan zu. Zur Beantwortung der obigen Frage müssen wir beide Größen, Energie und Entropie, kombinieren. Bei konstantem Volumen ist U die passende Energiegröße, und wir bilden die Kombination

$$A = U - TS \qquad \text{oder} \qquad \mathrm{d}A = \mathrm{d}U - T\mathrm{d}S - S\mathrm{d}T\,.$$

Diese Zustandsfunktion nennt sich »freie Arbeit« oder Helmholtz'sche freie Energie. Bei gegebener Temperatur T gilt $\mathrm{d}A = \mathrm{d}U - T\mathrm{d}S$. Ein Prozess läuft nur dann spontan ab (bei Temperatur T und konstantem Volumen), wenn $\mathrm{d}A < 0$. Dies kann geschehen, indem das System Energie an die Umgebung abgibt ($\mathrm{d}\,U < 0$), (Beispiel: reversible adiabatische Expansion des idealen Gases) oder indem es seine Entropie erhöht ($\mathrm{d}S > 0$) (Beispiel: irreversible Expansion des idealen Gases), oder beides. Wenn beide Terme unterschiedliche Vorzeichen haben, kommt es darauf an, welcher Term größer ist (z. B. Energieerniedrigung bei gleichzeitiger Entropieerniedrigung, $\mathrm{d}U < 0, \mathrm{d}S < 0$).

Für Prozesse bei konstantem Druck benutzt man statt U die Enthalpie H:

$$G = H - TS \qquad \text{oder} \qquad \mathrm{d}G = \mathrm{d}H - T\mathrm{d}S - S\mathrm{d}T\,.$$

Die Funktion G ist auch eine Zustandsfunktion, genannt »freie Enthalpie« oder Gibbs'sche freie Energie. Bei gegebener Temperatur T und konstantem Druck läuft ein Prozess nur dann spontan ab, wenn die freie Energie G dabei erniedrigt wird, $\mathrm{d}\,G < 0$. Dies kann auch entweder durch Enthalpieerniedrigung ($\mathrm{d}\,H < 0$, Wärme wird freigesetzt), durch Entropieerhöhung ($\mathrm{d}\,S > 0$), beides, oder durch Überwiegen des negativen Termes wenn beide in Konkurrenz treten. Gleichgewichtsbedingung: G bzw. A minimal (dann läuft keine Änderung des Zustandes spontan ab!) (Beispiel: Lösungswärme)

3.5.2 Phasenübergänge

Die übliche Materie kommt in drei Aggregatzuständen vor: gasförmig, flüssig, und fest. Die letzten beiden werden »kondensierte Phasen« genannt. Übergänge zwischen diesen Zuständen heißen »Phasenübergänge«; sie sind:

- Kondensieren (gasförmig → flüssig oder fest),
- Verdampfen (Flüssigkeit → Gas),
- Gefrieren oder Erstarren (Flüssigkeit → fest),
- Schmelzen (fest → flüssig) sowie
- Sublimieren (fest → gasförmig).

Weitere Phasenübergänge finden zwischen strukturellen Phasen (verschiedene Kristallstrukturen innerhalb einer kondensierten Phase, z. B. Diamant → Graphit, normalflüssig → supraflüssig) bzw. zwischen magnetischen oder elektronischen Zuständen statt (paramagnetisch → ferromagnetisch, normalleitend → supraleitend).

Um Phasenübergänge zu verstehen, nehmen wir als Beispiel das Kondensieren eines Gases zur Flüssigkeit. Dies geschieht nicht beim idealen Gas; das ideale Gas hat weder Eigenvolumen noch Wechselwirkungskräfte zwischen seinen Teilchen, die Zustandsgleichung sagt voraus, daß es bei größer werdendem Druck und tieferen Temperaturen nur allmählich »verschwindet«. Ein reales Gas hat dagegen ein Eigenvolumen und intermolekulare Kräfte (Kohäsionskräfte, meistens elektrische, sogenannte Van-der-Waals-Kräfte).

3.5.3 Das reale Gas

Wirkliche Gase bestehen aus Atomen oder Molekülen, die nicht Massenpunkte sind, sondern ein Eigenvolumen haben (Kovolumen b pro Mol); sie üben auch (anziehende) Wechselwirkungskräfte aufeinander aus, welche die mittlere Gasdichte und damit den Gasdruck erhöhen (Binnendruck a/V_m^2). Somit lautet die Zustandsgleichung (»Van der Waals-Gleichung«):

$$\left(P + \frac{a}{V_m^2}\right)(V_m - b) = RT$$

für ein Mol des realen Gases. (Der Faktor V_m^2 im Nenner des »Binnendrucks« stammt aus der Dichteabhängigkeit der Energie des realen Gases aufgrund der Wechselwirkungskräfte zwischen den Teilchen. Hier ist a eine Stoffkonstante mit der Einheit $\mathrm{Pa\,m^6}$).

Dieses Gas zeigt einen Phasenübergang (Kondensieren zur flüssigen Phase). Die Isotherme dieser Gleichung sind bei hohen Temperaturen ähnlich denen der idealen Gasgleichung. Bei tieferen Temperaturen zeigen sie erst einen und dann zwei Wendepunkte– dies bezeichnet den Bereich des Kondensierens. Dabei bleibt der Druck konstant (Dampfdruck), das Volumen verringert sich um einen Faktor von ca. 1000. Die Entropie und die Energie des Gases nehmen beim Kondensieren ab, letztere um einen relativ großen Betrag (die latente Wärme oder Kondensationswärme).

Wenn sich ein reales Gas durch einen Drossel von einem Bereich höheren Drucks P_1 in einen Bereich niedrigeren Drucks P_2 ausdehnt (*ohne* externe Arbeitsleistung!), dann kann es sich infolge der »internen Arbeit« (Arbeit gegen die Anziehungskräfte im Gas) abkühlen. Dies heißt *Joule-Thompson-Effekt*, und kann zur Kühlung verwendet werden (Linde-Verfahren zur Luftverflüssigung; siehe Abb. **??**.)

Diese Methode hat einen begrenzteren Temperaturbereich und niedrigeren Wirkungsgrad als die Expansionsmaschine (Carnot-Maschine), ist aber leichter zu realisieren (Beispiel: CO_2-Schnee). Hier wächst wieder die Unordnung (Entropie), sie wird nur *teilweise* von der Temperaturabnahme kompensiert.

Trägt man den Druck gegen T auf, so erscheinen die Phasengrenzen als Kurven, man nennt dies ein Phasendiagramm (siehe Abb. **??**). Die höchste Temperatur, bei der Kondensieren noch möglich ist, heißt »kritischer Punkt«; die Temperatur wo die gasförmige, die flüssige und die feste Phase alle koexistieren heißt »Tripelpunkt«. (Tafelbild, Versuche)

3.6 Transportphänomene

Transportphänomene bezeichnet eine Reihe von Prozessen, in denen eine Größe innerhalb der Materie bewegt wird. Ursache der Bewegung ist eine Nicht-Homogenität (meistens von der transportierten Größe selbst) innerhalb der Materie. Der Transport wird durch die thermische Bewegung der Atome oder Moleküle der Materie ermöglicht.

Gemeinsam haben alle Transportphänomene die Existenz einer Stromstärke, welche die pro Zeiteinheit transportierte Menge beschreibt, eine Materialkonstante, die die Transportgeschwindigkeit (meist als Funktion der Temperatur) angibt, sowie eine

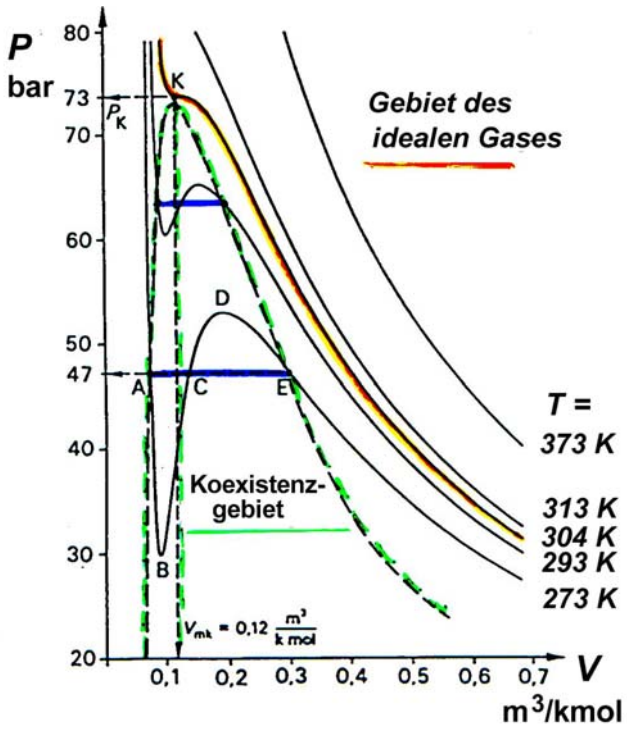


Abbildung 3.4. P-V-Diagramm eines VAN-DER-WAALS-Gases. Oberhalb der rot-gelben Linie verhält sich das Gas wie ein ideales Gas. K bezeichnet den kritischen Punkt: unterhalb der entsprechenden Temperatur beginnt das Gas zu kondensieren. Im Bereich der grün-gestrichelten Linien (Koexistenzgebiet) existieren Gas und Flüssigkeit nebeneinander beim konstanten Dampfdruck (blaue Linien). Der kritische Druck P_k und das kritische Molvolumen V_{mk} sind angegeben

Transportgleichung (Differentialgleichung), die den Zusammenhang zwischen Stromstärke, Materialkonstante und Inhomogenität (Gradient) beschreibt.

Als Beispiele nehmen wir den Transport der Wärme (Wärmeleitung), der Materie (Diffusion), des Impulses (viskose Strömung) sowie der elektrischen Ladung (elektrische Leitung); A ist hier die Querschnittsfläche der Materie (siehe Tabelle auf Seite **??**).

Die Materialkonstanten können mit Hilfe der mikroskopischen Größen v (Teilchengeschwindigkeit), n (Teilchendichte), l (mittlere freie Weglänge) und m (Teilchenmasse) ausgedrückt werden:

$$\lambda = \frac{f}{6}\,k\,n\,<v>\,l \qquad\qquad D = \frac{1}{3}\,v\,l\,n$$

$$\eta = \frac{1}{3}\,n\,m\,v\,l \quad \text{und} \quad \sigma = \frac{2\,n\,e_o^2\,l}{m\,v}$$

wobei k die BOLTZMANN-konstante, e_0 die Elementarladung, und f die Anzahl der Freiheitsgrade sind; die Ladungsdichte der freien Ladungsträger ist $\rho_e = e_0\,n$.

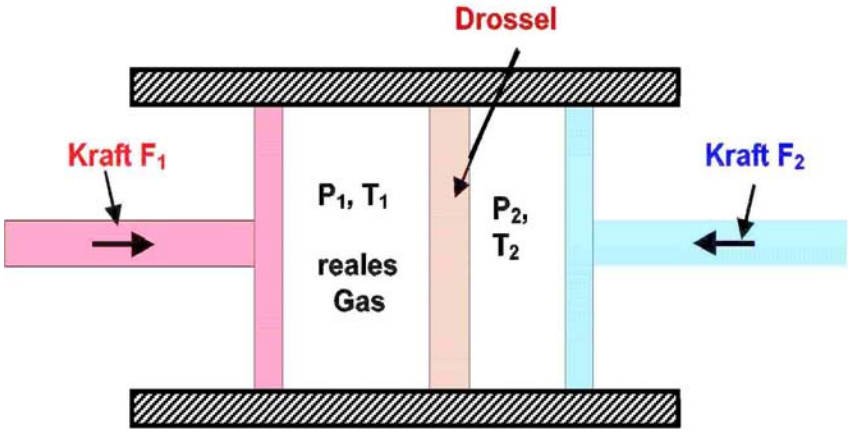


Abbildung 3.5. Joule-Thompson-Effekt. Das reale Gas strömt bei dem hohen konstanten Druck P_1 von der linken Kammer durch den Drossel in die rechte Kammer (niedriger konstanter Druck P_2), es kühlt sich dabei ggf. ab. Die Enthalpie bleibt konstant in diesem Prozess.

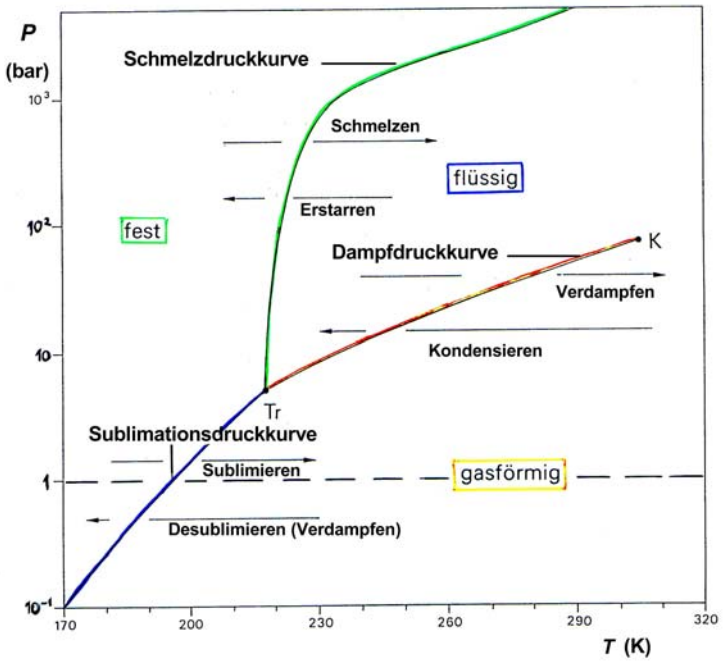


Abbildung 3.6. Phasendiagramm für CO_2. Der Punkt, wo alle drei Phasen koexistieren, heißt »Tripelpunkt« Tr; der Punkt, oberhalb dessen kein Kondensieren mehr möglich ist, heißt »kritischer Punkt« K. Bei Normaldruck (1 bar) existiert CO_2 nur in der Gasphase oder als Festkörper.

Tabelle 3.3.

Prozeß	Stromgröße	Materialkonstante	Transportgleichung
Wärmeleitung	Wärmemenge Q; Wärmestrom $I_{\mathrm{Q}} = \mathrm{d}Q/\mathrm{d}t$	Wärmeleitfähigkeit λ (J/ms K)	$I_{\mathrm{Q}} = -A\lambda\,\mathrm{d}T/\mathrm{d}x$
Diffusion	Konzentration n; Materiestrom $I_{\mathrm{n}} = \mathrm{d}n/\mathrm{d}t$	Diffusions-konstante D (1/ms)	$I_{\mathrm{n}} = -AD\,\mathrm{d}n/\mathrm{d}x$
Strömung	Impuls p; Impulsstrom $\mathrm{d}p/\mathrm{d}t = -F_R$ (Reibungskraft)	Viskosität η (Ns/m^2)	$F_{\mathrm{R}} = -A\eta\,\mathrm{d}v_0/\mathrm{d}x$
elektrische Stromleitung	elektrische Ladung q (As); elektrischer Strom $I = \mathrm{d}q/\mathrm{d}t$	elektrische Leit-fähigkeit σ (A/V m)	$I = -A\sigma\,\mathrm{d}U/\mathrm{d}x$ (U = Spannung) (V)

2 Optik

2.1 Wellenoptik

Wir beginnen nun ein neues Gebiet, das jedoch direkt an die Elektrizitätslehre anknüpft: die Wellenoptik. Sie behandelt die Wechselwirkung von Wellen, insbesondere (aber nicht ausschließlich) Licht- oder elektromagnetischen Wellen, mit Materie. Wir hatten bereits eine kurze Einleitung zu den elektromagnetischen Wellen (siehe Abschnitt auf Seite 99), an die wir uns im Folgenden erinnern sollten.

Eine wesentliche Eigenschaft von Wellen aller Art – d. h. auch von Lichtwellen – ist ihre Fähigkeit, sich zu überlagern, was wiederum zu den Phänomenen der Interferenz und der Beugung führt:

2.1.1 Beugung und Interferenz

Wellen – auch elektromagnetische Wellen – können sich *überlagern*. Falls sie die (annähernd) gleiche Frequenz und Wellenlänge haben, entsteht dabei eine *neue Welle*, die – je nach Phasenbeziehung der sich überlagernden Wellen – *verstärkt* oder *abgeschwächt* ist.

Dieses Phänomen nennt man *Interferenz*; die Verstärkung (die auftritt, wenn die Phasenverschiebung einer ganzen Wellenlänge entspricht, d. h. $\Delta\varphi = \lambda\, n$, $n = 0, 1, 2 \ldots$) heißt *konstruktive Interferenz*, die Auslöschung (die auftritt, wenn $\Delta\varphi = \lambda/2,\ 3\lambda/2,\ 5\lambda/2, \ldots$, d. h. eine halbe Wellenlänge) heißt *destruktive Interferenz*. Wellen, die interferenzfähig sind (d. h. Wellen mit fester Phasenbeziehung und gleicher Frequenz) werden *kohärente Wellen* genannt.

Lassen wir Wellen auf ein Hindernis fallen, welches einen Teil der Wellenfront durch Absorption oder Reflexion am Weiterlaufen hindert, den Rest aber durchlässt, so erscheint am Rande des durchgelassenen Strahls die sogenannte *Beugung*: der Strahl läuft nicht nur geradeaus, sondern wird seitlich zu den Rändern vom Hindernis *abgelenkt*.

Dies kann man sich durch die Huygens'sche Konstruktion (siehe Abb. 2.1 auf der nächsten Seite) klarmachen: demnach stellt jeder Punkt einer Wellenfront (eigentlich reichen Punkte, die jeweils um $\lambda/2$ voneinander entfernt sind) den Ausgangspunkt einer neuen Elementarwelle dar. Die Elementarwellen breiten sich kreis- oder kugelförmig aus, sie heben sich durch Interferenz in allen Richtungen auf, bis auf die ursprüngliche Ausbreitungsrichtung. Dort bildet die Einhüllende der Elementarwellen die neue Wellenfront. Wenn die Welle ein Hindernis trifft, werden einige Elementarwellen ausgeschaltet, die verbleibende Welle ist an den Rändern gekrümmt (siehe Abb. 2.1).

Wenn die Welle durch einen Spalt der Breite $d = \lambda/2$ geht, bleibt nur eine Elementarwelle, sie breitet sich hinter dem Spalt kreis- oder kugelförmig aus. Wenn $d \geq \lambda/2$, gibt es mehrere Elementarwellen, die miteinander interferieren. Dabei haben die einzelnen Elementarwellen einen Gangunterschied Δ, sie sind gegeneinander phasenverschoben. Bei der Überlagerung entstehen daher konstruktive oder destruktive Interferenzen, je nach Gangunterschied (siehe Abb. 2.2 auf Seite 227). Am weit entfernten Bildschirm entsteht ein Beugungsmuster (helles zentrales Maximum, mehrere nach außen schwächer werdende Nebenmaxima = »Beugungsringe oder -streifen«)

2.1.2 Beispiele für Beugung/Interferenz

Die Interferenz bezieht sich auf Überlagerung kohärenter Wellen, d. h. Wellen, die annährend gleiche Frequenzen bzw. Wellenlängen und eine feste Phasenbeziehung haben.

Mit Beugung bezeichnen wir die Richtungsänderung, die eine laufende Welle erfährt, wenn sie an einem

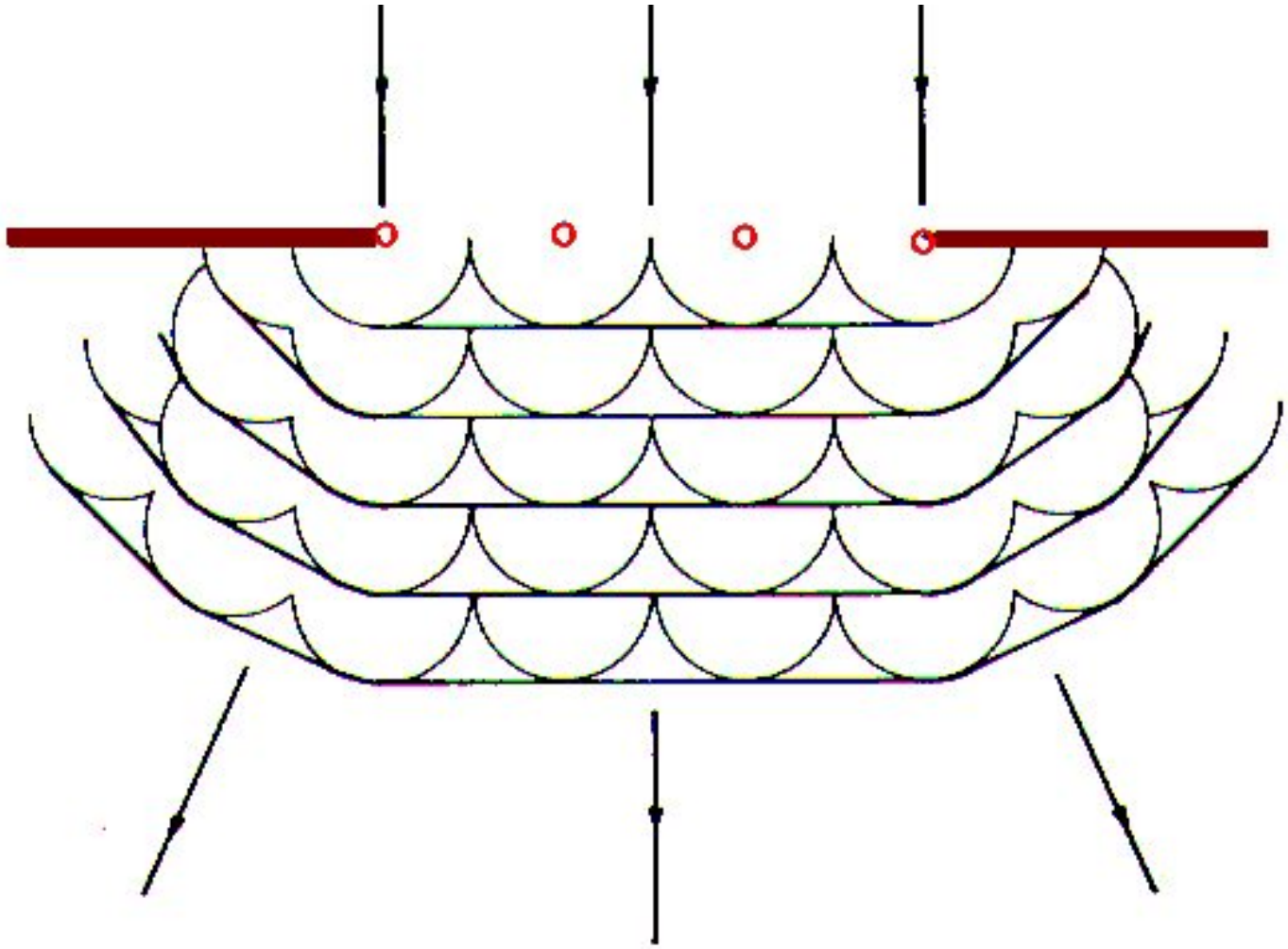


Abbildung 2.1. Huygens'sche Konstruktion: die von oben ankommenden Lichtstrahlen lassen sich durch Elementarquellen (o) darstellen; jede Elementarquelle sendet eine Kugelwelle aus, die Überlagerung dieser Kugelwellen bildet die neue Wellenfront. Am Rand des Hindernis werden die Wellen abgelenkt (Beugung)

Hindernis vorbeikommt: einer Kante, einem Spalt, einer runden Öffnung. Beugung und Interferenz treten

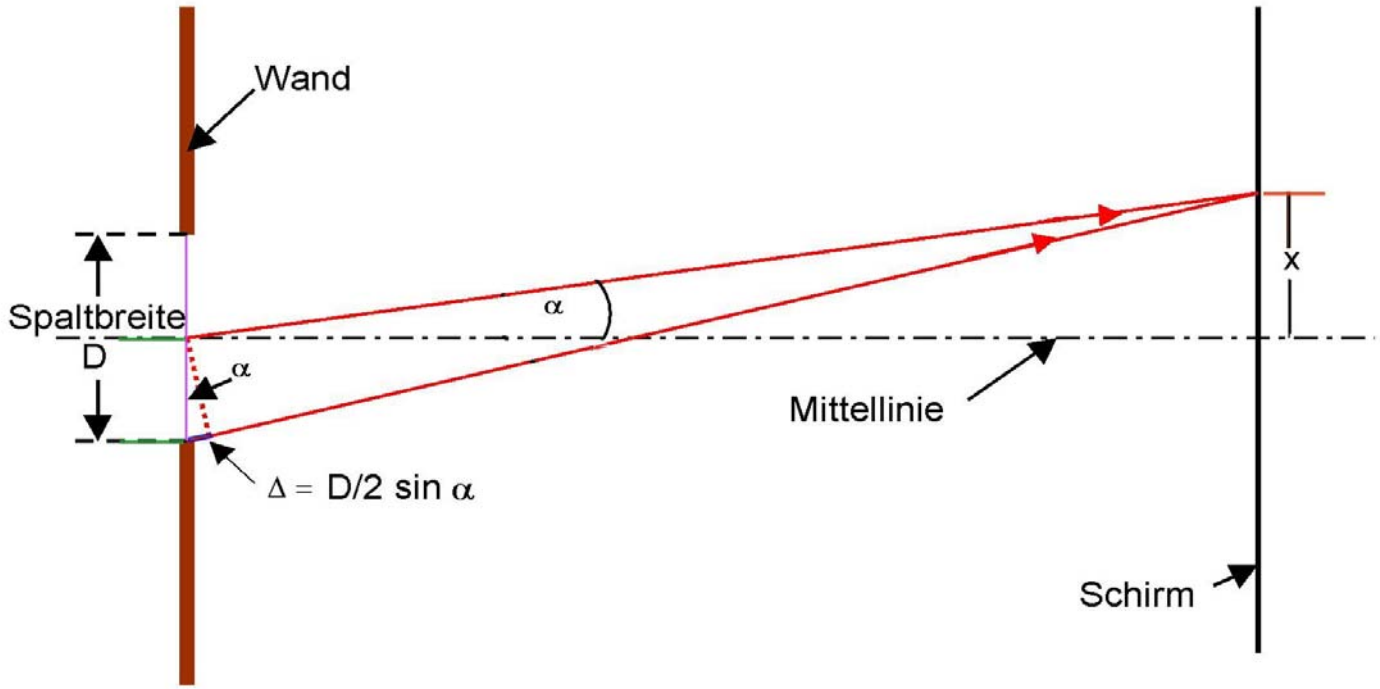


Abbildung 2.2. Gangunterschied von zwei Elementarwellen: zwei Strahlen, die um einen Winkel α an einem Spalt der Breite D abgelenkt werden und sich auf einem (weit entfernten) Schirm am Ort x von der Mittellinie entfernt treffen, haben einen Gangunterschied Δ; er beträgt hier $(D/2)\sin\alpha$ (ähnliche Dreiecke)

oft gemeinsam auf, da die gebeugten Teilwellen sich überlagern und interferieren können. Es gibt (u.a.) drei wichtige Fälle:

1. Doppelspalt-Interferenz (siehe Abb. 2.3 auf der nächsten Seite): Eine Welle passiert zwei Spalte S_1 und S_2, die im Abstand d zueinander stehen und jeweils so schmal sind, daß nur *eine* Elementarwelle von jedem Spalt ausgeht. Die Verteilung der Amplituden in der Beobachtungsebene ist

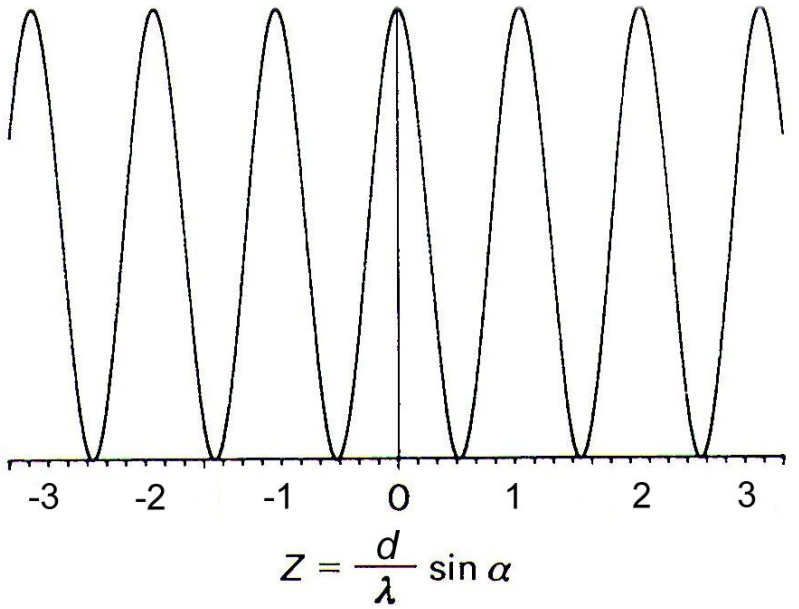


Abbildung 2.3. Doppelspalt-Interferenz

kosinusförmig; die Maxima sind gegeben durch die Bedingung

$$\sin \alpha_{\text{Max}} = n\frac{\lambda}{d} \qquad (n = 0,\, 1,\, 2,\, 3\ldots) \; .$$

2. Beugung an einem breiten Spalt (siehe Abb. 2.4 auf der folgenden Seite): Eine Welle passiert einen Spalt, der so breit ist, daß viele Elementarwellen von ihm durchgelassen werden. Diese Teilwellen interferieren miteinander und geben in der Beobachtungsebene ein Beugungsmuster mit einem breiten zentralen Maximum und schwächeren Nebenmaxima. Die Amplitudenverteilung auf dem Bildschirm hat die Form $[\sin \Delta\Phi]/\Delta\Phi$, wo $\Delta\Phi$ die gesamte Phasenverschiebung (d.h. die von den

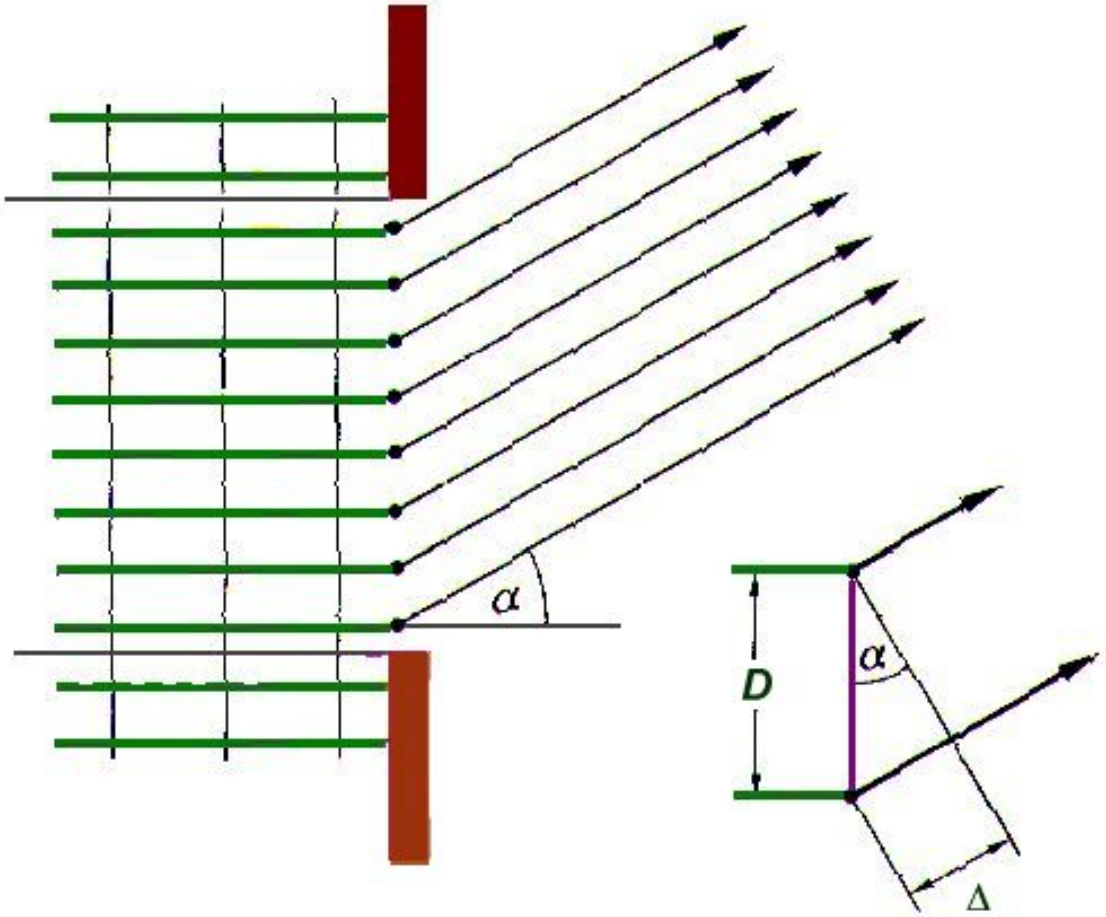


Abbildung 2.4. Durch den breiten Spalt laufen viele Parallelstrahlen, die alle um den Winkel α abgelenkt werden; das kleine Bild zeigt den Gangunterschied $\Delta = D \sin \alpha$ zwischen den Randstrahlen. Die Strahlen (jeder stellt eine Elementarwelle dar) treffen sich am Bildschirm und erzeugen dort Interferenzen

Randstrahlen) ist. Der Winkel, bei dem das erste Minimum auftritt, ist gegeben durch:

$$\sin \alpha_{\text{Min}} = \pm n \frac{\lambda}{D} \qquad (\text{n} = 1) \ ,$$

wobei D die Spaltbreite angibt (siehe auch Abb. 2.5 auf der nächsten Seite).

3. Beugung am Gitter (siehe Abb. 2.6 auf Seite 232 und Abb. 2.7 auf Seite 233): wir haben nun eine große Anzahl von Einzelspalten (N pro Längeneinheit) die nebeneinander stehen, jeweils mit dem Abstand g ($g \ \widehat{=}$ »Gitterkonstante«, d. h. $g = 1/N$). Die Teilwellen von den Spalten geben in der Beobachtungsebene scharfe, gut getrennte Hauptmaxima (0., 1., 2. ... Ordnung). Die Bedingung für ein Maximum der n. Ordnung in der Beobachtungsebene ist dann:

$$\sin \alpha_{\text{Max}} = n \frac{\lambda}{g} \ .$$

Beugung am Gitter hat eine wichtige Anwendung in der Wellenlängenbestimmung (Spektroskopie in verschiedenen Bereichen, auch in der Astronomie) sowie zur Strukturbestimmung von Molekülen und Kristallen (das »Beugungsgitter« ist dann das mikroskopische Kristallgitter, man verwendet kurzwellige Strahlung wie Röntgenstrahlung, Elektronen oder Neutronen).

2.2 Polarisation des Lichtes

Eine transversale Welle hat ihre Schwingungsrichtung (z. B. den E-Feldvektor einer Lichtwelle) senkrecht zur Ausbreitungsrichtung $\mathbf{k}$. Es gibt jedoch beliebig viele Ebenen, die senkrecht zu einem gegebenen $\mathbf{k}$ stehen. Wenn die Schwingungsrichtungen von Wellen wahllos über diese möglichen Ebenen verteilt sind, heißen sie *unpolarisierte Wellen* (Beispiel: »natürliches« Licht: Sonnenlicht oder Licht von einer

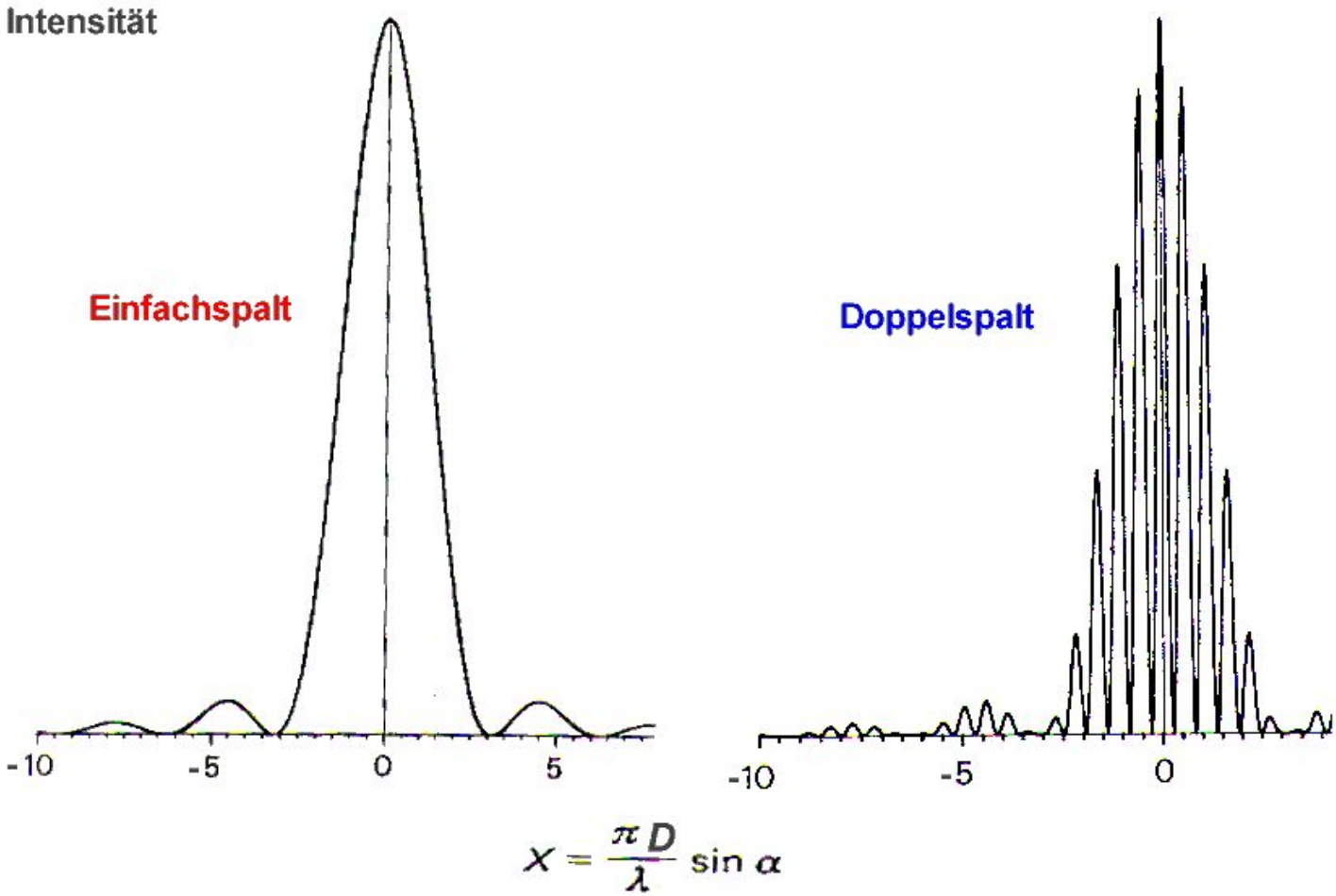


Abbildung 2.5. Beugungsbilder: links das Bild von einem Einzelspalt der Breite $D \gg \lambda/2$. Die Intensitätsminima treten für $x = \pm\pi, 2\pi, 3\pi \ldots$ auf, entsprechend der Bedingung $\sin \alpha_{\text{Min}} = n\lambda/D$, mit $n = \pm 1, 2, 3 \ldots$; rechts das Bild von zwei gleichen Spalten; zum Beugungsbild (einhüllende Kurve) kommt ein Interferenzmuster der Strahlen von den beiden Spalten (kosinusförmige Änderung der Amplitude entsprechend dem Abstand d der beiden Spalten)

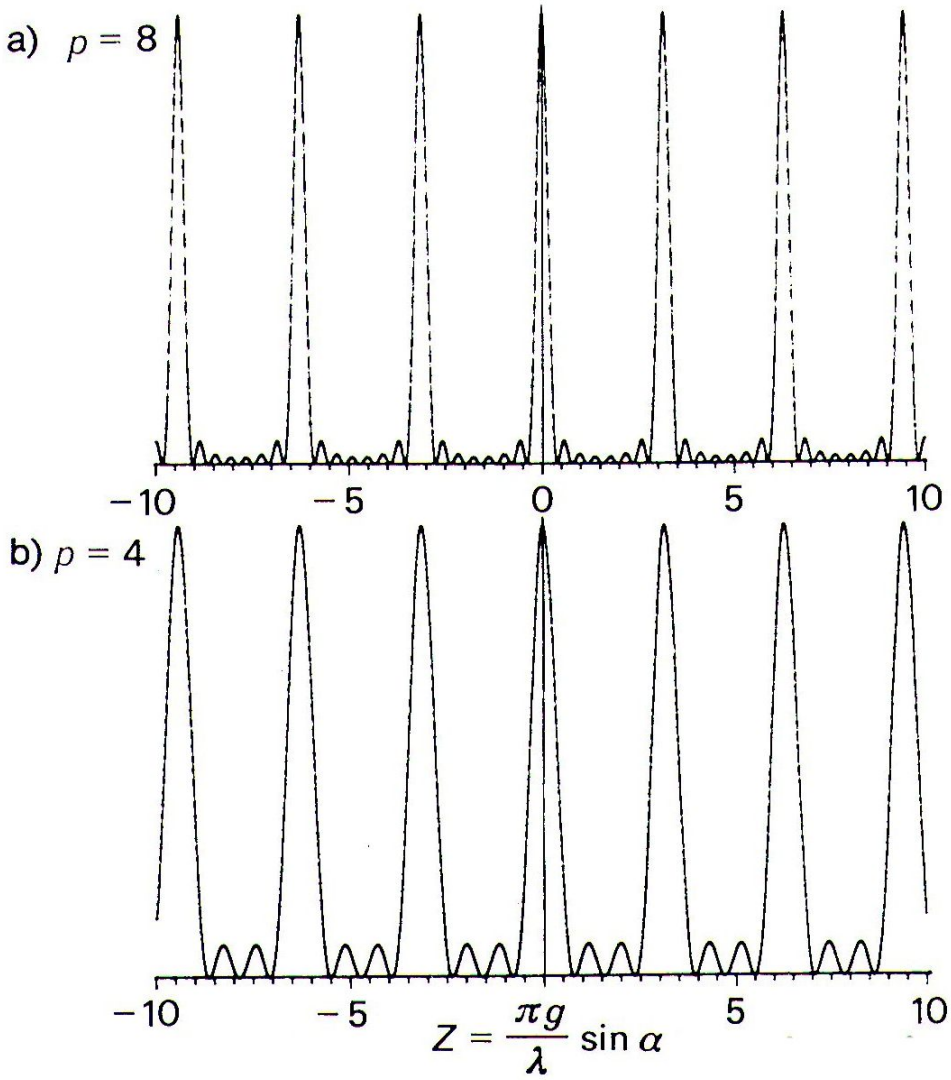


Abbildung 2.6. Beugung am Gitter, dargestellt für zwei verschiedene Gitter; oben (a) für $p = 8$ Einzelspalte, unten (b) für 4 Spalte. Es bilden sich Hauptmaxima aus, die restlichen Maxima im Interferenzbild werden mit wachsendem p zunehmend schwächer. Bei $p = 4$ ist jedes 3. Maximum ein Hauptmaximum, bei $p = 8$ jedes 7. Maximum usw.

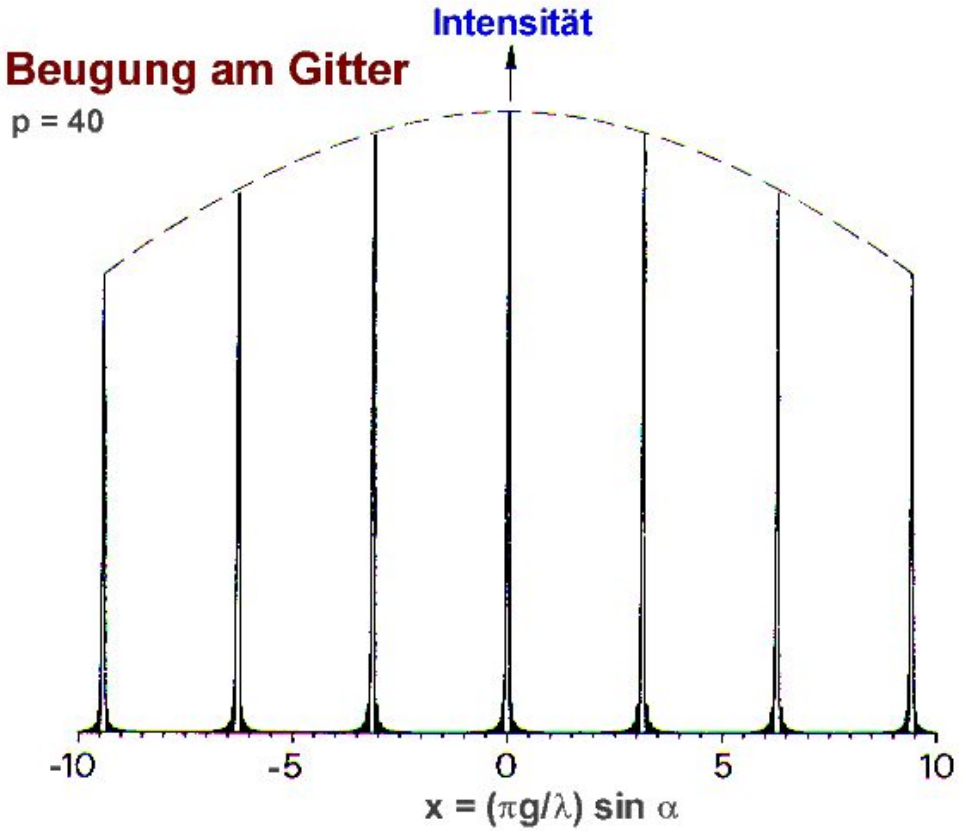


Abbildung 2.7. Gitterbeugung von einer großen Anzahl von Einzelspalten ($p = 40$). Die Hauptmaxima sind nun sehr scharf und intensiv, die Nebenmaxima fast unsichtbar. Die einhüllende Kurve (gestrichelt) entspricht dem Beugungsbild der einzelnen Spalten

thermischen Quelle). Findet dagegen die Schwingung in nur einer bestimmten Ebene statt, spricht man von einer *polarisierten Welle* (in diesem Falle: linearpolarisiert, siehe Abb. 2.8 auf Seite 248).

Eine beliebige linearpolarisierte Welle läßt sich als Überlagerung zweier polarisierten Wellen mit senkrecht zueinanderstehenden Amplituden (E_σ, E_π) und ohne Phasendifferenz (oder mit der Phasendifferenz $\Delta\varphi = n\lambda/2, n = 0, 1, 2 \ldots$) darstellen. Die Amplitude der resultierenden Welle ergibt sich als

Vektorsumme der beiden Amplituden E_σ und E_π, ihr Betrag und ihre Richtung hängen von der relativen Größe von E_σ und E_π ab.

Eine weitere Art der Polarisation entsteht, wenn die Wellen E_σ und E_π mit einer Phasenverschiebung von $\Delta\varphi = \lambda/4$ überlagert werden: die Amplitude der resultierenden Welle dreht sich um die **k**-Achse einmal pro Schwingung, wobei ihr Betrag konstant bleibt. Dies nennt man eine *zirkulare* Polarisation. Je nach Drehsinn (d. h. $\Delta\varphi = +\lambda/4$ oder $-\lambda/4$) wird sie als *rechts-zirkular-polarisierte* oder *links-zirkular-polarisierte* Welle bezeichnet (rhc bzw. lhc; Konventionen!). Eine zirkularpolarisierte Welle überträgt nicht nur Energie und Linearimpuls, sondern auch Drehimpuls (siehe Abb. 2.9 auf Seite 249).

Ist die Phase $0 < \Delta\varphi < \lambda/4$, so dreht sich die Amplitude und ändert ihren Betrag gleichzeitig; dies wird als elliptische Polarisation bezeichnet. Überlagert man zwei zirkularpolarisierte Wellen ($rhc + lhc$), so entsteht wieder eine linearpolarisierte Welle, deren Polarisationsebene von der Phasendifferenz der beiden überlagerten Wellen abhängt.

2.2.1 Entstehung der Polarisation

Es gibt verschiedene Wege, eine linear- oder zirkularpolarisierte Welle zu erzeugen:

1. Emission durch eine polarisierte Quelle (z. B. schwingenden Dipol mit feststehender Dipolachse);
2. Streuung oder Reflexion einer Welle um einen festen Winkel (Dipolmodell! Brewsterwinkel);
3. Transmission durch einen doppelbrechenden Kristall (s.u.);
4. Transmission durch einen Polarisationsfilter (Polaroidfilter);
5. Überlagerung polarisierter Wellen (s.o.)

2.2.2 Doppelbrechung

Verschiedene Kristalle (z. B. Kalkspat, Quarz) zeigen unterschiedliche Lichtgeschwindigkeiten für transmittiertes Licht mit senkrechter bzw. paralleler Polarisation E_σ oder E_π (relativ zur »optischen Achse«, die von der Kristallstruktur festgelegt wird). Ein unpolarisierter Lichtstrahl, der auf einen solchen Kristall fällt, wird in zwei Strahlen mit unterschiedlicher Ausbreitungsrichtung $\mathbf{k}$ und senkrecht zueinanderstehenden Polarisationsrichtungen (»ordentlicher« und »außerordentlicher« Strahlen) aufgespalten. Fällt ein linear-polarisierter Strahl senkrecht zur optischen Achse ein, so wird er nicht abgelenkt, aber die beiden Polarisationskomponenten E_σ und E_π erfahren eine Phasenverschiebung je nach Kristalldicke; der ausgehende Strahl kann dann zirkularpolarisiert sein (»$\lambda/4$-Platte«).

2.2.3 Optische Aktivität

Manche Substanzen (insbes. Lösungen von organischen Verbindungen mit asymmetrischen C-Atomen, z. B. Zucker, Aminosäuren) zeigen verschiedene Lichtgeschwindigkeiten für *rhc* und *lhc* Lichtwellen. Wenn linearpolarisiertes Licht sie durchquert, das aus einer Überlagerung von *rhc*- und *lhc*-Komponenten besteht, werden die beiden Komponenten relativ zueinander phasenverschoben, je nach Probendicke d; dies erzeugt eine Drehung φ der Polarisationsebene, proportional d (und bei Lösungen proportional der Konzentration c des »optisch aktiven« Stoffes). Die Proportionalitätskonstante ist die spezifische Drehung α_K, gemessen in Drehwinkel ($^\circ$)/mm. Dies kann zum Nachweis und zur Analyse von solchen Substanzen verwendet werden (Polarimeter!).

Andere polarisationsabhängige Effekte hängen vom *mechanischen* Streß oder vom angelegten *elektrischen* oder *magnetischen* Feld ab (Streßdichroismus, optischer KERR-Effekt, FARADAY-Effekt). Die meisten dieser Effekte sind auch *wellenlängenabhängig* (Dichroismus).

Wird eine linearpolarisierte Welle mit einem Winkel φ zwischen ihrer Polarisationsebene und der Durchlaßrichtung eines Polarisationsfilters vom Filter transmittiert, so reduziert sich ihre Amplitude um den Faktor $\cos\varphi$ (idealer Filter). Polaroidfilter sind im sichtbaren Bereich weitgehend *wellenlängenunabhängig*.

2.3 Geometrische Optik

Um das Verhalten von Licht in der makroskopischen Welt zu beschreiben, insbesondere um die Funktionsweise von optischen Instrumenten zu verstehen, reicht ein idealisiertes Bild der Lichtausbreitung aus: wir vergessen die Wellennatur vom Licht und betrachten die Ausbreitung von (gedachten) *Strahlen* oder Strahlenbündel. Diese sind (beliebig dünne) Linien, die senkrecht zu den Wellenfronten des Lichtes stehen und sich geradlinig ausbreiten, außer bei Wechselwirkung mit optischen Elementen.

2.3.1 optische Elemente. Reflexion und Brechung

Optische Elemente fallen (grob gesagt) in drei Gruppen: *Spiegel, Prismen* und *Linsen*. Sie wechselwirken mit den Lichtstrahlen durch zwei Phänomene: die *Reflexion* und die *Brechung*. Beide finden im Prinzip bei jedem Übergang eines Lichtstrahls von einem Medium zum anderen statt.

Die Reflexion eines Lichtstrahls ähnelt dem voll-elastischen Stoß eines Teilchens mit einer flachen Wand: die Impulskomponente senkrecht zur Wand wird umgekehrt, die Komponenten parallel zur Wand bleiben unverändert. Das Ergebnis ist ein reflektierter Strahl, der *in einer Ebene* mit dem einfallenden Strahl sowie der Flächennormale (»Einfallslot«) liegt, und den gleichen Winkel mit dem Lot bildet (»Ausfallswinkel γ«), wie der einfallende Strahl (»Einfallswinkel α«; siehe Abb. 2.10 auf Seite 250).

Die Brechung (siehe Abb. 2.11 auf Seite 251) findet statt, wenn der einfallende Strahl (teilweise) in das zweite Medium eindringt (transparentes Medium!), dort aber eine andere Ausbreitungsgeschwindigkeit

hat, als im ersten Medium.

Die Ausbreitungsgeschwindigkeit c_0 (im Vakuum) wird von den elektromagnetischen Eigenschaften des Vakuums (ε_0, »elektrische Elastizität« des Vakuums; μ_0, »elektrische Trägheit« des Vakuums) bestimmt.

Ein anderes Medium als das Vakuum hat andere Eigenschaften als Träger der elektromagnetischen Wellen (relative Dielektrizitätszahl ε_r, relative Permeabilitätszahl μ_r). Diese multiplizieren die Konstanten ε_0 und μ_0 und ergeben somit die Ausbreitungsgeschwindigkeit im Medium, c_M:

$$c_\mathrm{M} = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_\mathrm{r}\varepsilon_0\mu_\mathrm{r}\mu_0}} = \frac{c_0}{\sqrt{\varepsilon_\mathrm{r}\mu_\mathrm{r}}}$$

Eine Änderung der Ausbreitungsgeschwindigkeit hat auch eine Änderung der Wellenlänge λ zur Folge (aufgrund von $c = \lambda\nu$; die Frequenz ν bleibt konstant!). Außerdem ändert sich die Ausbreitungsrichtung, wenn der einfallende Strahl nicht senkrecht auf die Grenzfläche trifft.

Dies kann man mit geometrischen Modellen verstehen (Auftreffen der Wellenfronten, marschierende Soldaten, Prinzip der kürzesten Durchlaufzeit). Da die Konstanten ε_r und μ_r des Materials von der Lichtfrequenz abhängen, ist die Brechung auch frequenzabhängig (Dispersion): Licht höherer Frequenz (bzw. kürzerer Wellenlänge) wird stärker gebrochen!

Den Brechungswinkel kann man mit Hilfe der Snellius-Formel berechnen:

$$\frac{\sin\alpha}{\sin\beta} = \frac{c_\mathrm{M1}}{c_\mathrm{M2}} = \frac{N_2}{N_1}$$

wobei α der Einfallswinkel und β der Winkel des gebrochenen Strahls zum Einfallslot sind, und M_1 bzw. M_2 bezeichnen die beiden Medien. Die dimensionslosen Zahlen N_1 und N_2 werden »Brechzahlen« oder »Brechungsindizes« genannt; sie sind definiert als das Verhältnis der Lichtgeschwindigkeit c_0 im Vakuum

zur Lichtgeschwindigkeit c_{M} im Medium:

$$N_1 = \frac{c_0}{c_{\mathrm{M1}}} \; .$$

Mit der obigen Formel für die Lichtgeschwindigkeit sieht man, daß

$$N = \sqrt{\varepsilon_{\mathrm{r}} \mu_{\mathrm{r}}}$$

gilt. Da die Permeabilität μ_{r} für alle transparenten Medien etwa gleich 1 ist, wird oft als gute Näherung $N = \sqrt{\varepsilon_{\mathrm{r}}}$ gesetzt.

Beide Phänomene – Reflexion und Brechung – können mit Hilfe eines Dipol-Modells mit der Wellentheorie des Lichtes in Einklang gebracht werden. Dabei wird in der Materie die Anwesenheit von elementaren (elektrischen) Dipolen (in Wahrheit die Atome und Moleküle) vorausgesetzt. Der einfallende Strahl (Primärstrahl) regt sie zu erzwungenen Schwingungen an, die schwingenden Dipole strahlen wieder Sekundärstrahlen ab. Der reflektierte Strahl besteht aus solchen Sekundärstrahlen, der gebrochene Strahl aus der Überlagerung des Primärstrahls mit vorwärtsgerichteten Sekundärstrahlen. Mit diesem Modell kann man auch die Polarisation von reflektierten Strahlen erklären.

2.3.2 Reflexion und Brechung an gekrümmten Flächen

Die obigen Betrachtungen der Reflexion und Brechung gelten zunächst für ebene Grenzflächen. Wenn wir optische Elemente mit gekrümmten Grenzflächen (Hohlspiegel, Linsen) verwenden, können einfallende Lichtstrahlen in einen Brennpunkt gesammelt bzw. zerstreut werden. Dies bildet die Basis aller bildgebenden optischen Instrumenten, angefangen mit dem menschlichen Auge.

Gekrümmte Flächen heißen *konvex*, wenn sie nach außen gewölbt sind; sie heißen *konkav*, wenn sie nach innen gewölbt sind. Ein konkaver Spiegel (Hohlspiegel) bündelt einfallende Lichtstrahlen in einen Brennpunkt, er *sammelt* sie durch Reflexion.

Linsen sind symmetrisch gekrümmte Körper aus transparentem Material – Glas oder Kunststoff – die Lichtstrahlen durch Brechung sammeln oder zerstreuen. Ihre Brechungsindizes N sind höher als der des umgebenden Mediums (meistens Luft).

- Bikonvexe Linsen (in der Mitte dicker) wirken immer als Sammellinsen;
- bikonkave Linsen (in der Mitte dünner) wirken immer als Zerstreuungslinsen;
- konkavo-konvexe Linsen (z. B. Brillengläser) können Sammellinsen oder Zerstreuungslinsen sein, je nach dem, ob sie in der Mitte dicker oder dünner sind, als am Rande.

Als Beispiel betrachten wir den Fall einer *Sammellinse*. Zur Vereinfachung nimmt man üblicherweise an, daß die Brechung der Lichtstrahlen, die in Wirklichkeit an zwei Grenzflächen geschieht (hintere und vordere Fläche der Linse) nur einmal – in der sog. Hauptebene der Linse – stattfindet. (Diese Näherung gilt für dünne Linsen, deren Dicke am Mittelpunkt viel kleiner als der Durchmesser ist.) Die Symmetrieachse durch den Linsenmittelpunkt und senkrecht zur Hauptebene heißt »optische Achse« der Linse (siehe Abb. 2.12 auf Seite 252).

Eine (dünne) Sammellinse bricht von vorne einfallende achsenparallele Strahlen so, daß sie durch den hinteren Brennpunkt F' gehen. Die Entfernung des Brennpunktes vom Linsenmittelpunkt nennt man die Brennweite f. Der Kehrwert der Brennweite ist ein Maß für die Stärke der Linse, er heißt Brechkraft D:

$$D = \frac{1}{f} \qquad (\text{Einheit: dioptrie} \equiv 1/\text{m},\ 1\ \text{dpt} \ \widehat{=}\ 1\ \text{m}^{-1}) \ .$$

Die Brechkräfte dünner Linsen, die hintereinander aufgestellt sind, addieren sich einfach, solange sie nicht zu weit auseinander stehen (Brechung an einer einzigen Hauptebene):

$$D_{\text{ges}} = D_1 + D_2 \ .$$

Bei größeren Entfernungen der Linsen muß ein Korrekturterm eingefügt werden:

Zerstreuungslinsen brechen einfallende Parallelstrahlen so, daß sie auf der hinteren Seite der Linse auseinandergehen (*divergente* Strahlen); ihre rückwärtigen Verlängerungen treffen sich jedoch vor der Linse am vorderen Brennpunkt F . Die Brennweite f ist daher negativ, ebenfalls die Brechkraft D. Die Kombination einer Sammellinse und einer Zerstreuungslinse gibt eine Linse mit kleinerer Brechkraft.

Die Bildentstehung bei einer Sammellinse zeigt Abbildung 2.14 auf Seite 254. Man benutzt immer drei Strahlen, die von einem Punkt des abzubildenen Gegenstandes ausgehen:

1. einen achsenparallen Strahl, der von der Linse zum Brennpunktstrahl gemacht wird;
2. einen Mittelpunktstrahl, der ungebrochen weiterläuft;
3. sowie einen Brennpunktstrahl (durch den vorderen Brennpunkt F), der zum Parallelstrahl auf der Hinterseite der Linse wird .

Die Entfernung des Gegenstandes vom Linsenmittelpunkt auf der vorderen Seite der Linse heißt »Gegenstandsweite« g, seine Größe »Gegenstandsgröße« G; die Entfernung des Bildes (vordere oder hintere Seite) ist die »Bildweite« b, seine Größe die »Bildgröße« B. Diese hängen mit der Brechkraft $1/f$ der Linse über die Abbildungsgleichung zusammen:

$$D = \frac{1}{f} = \frac{1}{b} + \frac{1}{g} \,.$$

Darüberhinaus gilt die Vergrößerungsgleichung:

$$\frac{B}{G_{240}} = \frac{b}{g}$$

(Beide lassen sich durch einfache trigonometrische Überlegungen herleiten; s. Skizze zum Strahlengang.) Wir können drei Fälle unterscheiden:

1. $g \geq 2f$, der Gegenstand ist außerhalb der doppelten Brennweite. Das Bild (s. Abbildungsgleichung) ist bei $f \leq b \leq 2f$, es ist umgekehrt, reell, und verkleinert (ein reelles Bild kann auf einem Bildschirm geworfen werden). Dies ist der Fall z. B. beim Fernrohr und bei der Augenlinse.

2. $f \leq g \leq 2f$, der Gegenstand ist zwischen der einfachen und der doppelten Brennweite. Das Bild ist bei $b \geq 2f$, es ist umgekehrt, reell, und vergrößert. Dies gilt z. B. für eine Projektionslinse oder bei der Objektivlinse des Mikroskops.

3. $g \leq f$, der Gegenstand ist innerhalb der einfachen Brennweite. Das Bild ist virtuell, aufrecht, und vergrößert, $b < 0$, die Strahlen auf der Vorderseite der Linse sind divergent. Das virtuelle Bild kann nur durch eine weitere Fokussierung der Strahlen gesehen werden (z. B. durch die Augenlinse). Dies gilt bei der Lupe.

Anwendungen werden im nächsten Abschnitt 2.4 behandelt.

2.4 Optische Instrumente

Auge, Lupe, Mikroskop, Spektralapparat; Auflösungsvermögen

2.4.1 Das menschliche Auge

Das menschliche Auge ist ein optisches Instrument mit einer relativ komplexen Struktur (siehe Abb. 2.15 auf Seite 255). Die Brechung geschieht bei einer Reihe von Übergängen zwischen verschiedenen Medien (Luft – Hornhaut, Hornhaut – Kammerwasser, Kammerwasser – Linse, Linse – Glaskörper).

An der hinteren Wand ist der »Lichtdetektor«, die Netzhaut (retina), welche die Lichtrezeptoren enthält. Diese reagieren mit Nervenimpulsen auf Lichteinstrahlung und stellen die »Bildpunkte« im gesehenen Bild dar. Damit ein Gegenstand scharf gesehen wird, muß ein (reelles) Bild davon auf die Netzhaut geworfen werden. Dies geschieht durch die kombinierte Wirkung der verschiedenen brechenden Medien im Auge (siehe Abb. 2.15 auf Seite 255). Die Lichtstärke wird durch die Größe der Pupillenöffnung geregelt (Rückkopplungs- Mechanismus, genannt »Dunkeladaptation«). Die Bildschärfe wird durch Änderung der Brechkraft der Augenlinse eingestellt (»Akkomodation«); diese wird wiederum durch Straffung der Ziliarmuskulatur und Spannung oder Entspannung der Linsenkapsel bewirkt. Im entspannten Zustand ist das Auge »auf Unendlich« akkomodiert. Parallel einfallenden Strahlen werden auf der Netzhaut gebündelt, die Bildweite b ist gleich die Augentiefe (ca. 22 mm) bei unendlicher Gegenstandsweite ($b = f, D = 1/f = 1/b$, d. h. D beträgt ca. 45,5 dpt.). Etwa die Hälfte dieser Brechkraft entsteht vor und nach der Linse, die Brechkraft der Linse selbst im entspannten Zustand beträgt ca. 22 dpt.

Bei der Betrachtung eines nahen Objektes ($g \simeq s_0 =$ »mindest deutliche Sehweite« oder »konventionelle Sehweite«, definiert als 250 mm) muß die Brechkraft vom Auge entsprechend der Abbildungsgleichung zunehmen, damit b weiterhin der Augentiefe von 22 mm entspricht. Aus der Gleichung finden wir $D = 1/f = 1/b + 1/g = 1/0,022 + 1/0,250 = 49{,}5$ dpt.

Die zusätzliche Brechkraft muß durch die Linse aufgebracht werden, sie erhöht ihre Brechkraft von etwa 22 auf 26 dpt. Bei älteren Menschen verliert die Linse an Flexibilität, man wird »weitsichtig«, da diese Erhöhung nicht mehr möglich ist.

Bei einem Menschen, der an Kurzsichtigkeit (myopia) leidet, ist die Gesamtbrechkraft vom Auge zu hoch (bzw. der Augapfel zu lang), so daß beim entspannten Auge das Bild vor der Netzhaut geworfen wird. Dies bedeutet, daß entfernte Objekte nicht mehr scharf gesehen werden können; andererseits wird die mindest deutliche Sehweite s_0 kleiner, der Mensch kann Objekte noch näher betrachten als ein Normalsichtiger.

Er hat eine »eingebaute Lupe« (Korrektur: Zerstreuungslinse von typisch -1,5 bis -4,5 dpt).

Bei Weitsichtigkeit ist der Augapfel zu kurz bzw. die Brechkraft vom Auge zu gering. Der Mensch kann auf ferne Objekte leicht akkomodieren, jedoch werden Objekte in seiner Nähe nicht mehr scharf gesehen; die mindest deutliche Sehweite s_0 ist größer, als beim Normalsichtigen (Korrektur: Sammellinse von typisch 1,5 bis 3 dpt).

2.4.2 Die Lupe

Eine Lupe ist eine einfache Sammellinse von mittlerer Brennweite, typisch zwischen 20 mm und 50 mm. Sie dient dazu, Objekte noch näher zu betrachten, als bei der deutlichen Sehweite s_0, welche für das bloße Auge gilt. Das Objekt wird in (oder innerhalb) der Brennebene ($g \leq f$) der Lupe gehalten. Damit sind die durch die Lupe tretenden Lichtstrahlen parallel bzw. divergent, es wird ein virtuelles Bild hinter der Lupe (im Unendlichen, falls $g = f$) erzeugt.

Das Auge kann dieses Bild im völlig entspanntem Zustand betrachten. Die effektive Vergrößerung Γ der Lupe ist definiert mit Hilfe des Sehwinkels δ (da kein reelles Bild entsteht, kann man die Bildgröße B nicht verwenden). Der Sehwinkel ist ein Maß für die scheinbare Größe des Objektes bei einem bestimmten Abstand.

Die Vergrößerung einer Lupe wird durch Vergleich des Sehwinkels δ definiert, mit dem der Gegenstand *mit* und *ohne* die Lupe gesehen wird. Ohne die Lupe, wenn der Gegenstand aus der mindest deutlichen Sehweite s_0 betrachtet wird, ist der Sehwinkel durch $\tan\delta_0 \simeq G/s_0$ (G = Gegenstandsgröße) gegeben. Mit der Lupe wird per Konvention das Objekt in der Brennebene gehalten, so daß die durch die Lupe fallenden Strahlen parallel sind, das Auge ist auf unendlich akkomodiert. Der Sehwinkel ist dann vergrößert, er beträgt $\tan\delta' \simeq G/f$ (f = Brennweite der Lupe; siehe Abb. 2.16 auf Seite 256).

Das Verhältnis δ'/δ_0 gibt die Vergrößerung Γ an; wenn man davon ausgeht, daß beide Sehwinkel bei

einem kleinen Gegenstand klein sein werden, gilt als gute Näherung $\tan\delta \approx \delta$, so daß

$$\Gamma = \frac{\delta'}{\delta_0} \simeq \frac{\left(\frac{G}{f}\right)}{\left(\frac{G}{s_0}\right)} = \frac{s_0}{f} \; .$$

Die Vergrößerung ist einfach das Verhältnis von der deutlichen Sehweite zur Brennweite der Lupe (z. B. 250 mm/50 mm = $5x$ für $f = 50$ mm; gilt für einen Gegenstand in der Brennebene der Lupe).

2.4.3 Auflösungsvermögen

Das räumliche Auflösungsvermögen – die Fähigkeit, kleine Einzelheiten im betrachteten Gegenstand zu unterscheiden – vom Auge und von anderen optischen Instrumenten ist beugungsbegrenzt; durch Beugung an der Augenöffnung (Pupille) erscheinen Punkte im Gegenstand als Beugungsscheibchen im Bild, die nur voneinander unterschieden (aufgelöst) werden können, wenn das Beugungsmaximum vom zweiten Punkt im 1. Minimum vom ersten Punkt liegt (oder weiter entfernt ist: Rayleigh'sches Kriterium). Für eine Lichtwellenlänge von 600 nm und eine runde Pupillenöffnung vom Durchmesser 4 mm ergibt sich einen Mindestwinkel zwischen zwei auflösbaren Punkten von $1,8 \cdot 10^{-4}$ rad, entsprechend einem Abstand auf der Netzhaut von ca. 4 μm. Der tatsächliche Abstand der Rezeptoren liegt in dieser Größenordnung, da noch dichtere Bildpunkte zu keiner weiteren Verbesserung der Auflösung führen würden (siehe Abb. 2.17 auf Seite 257).

2.4.4 Das Mikroskop

Das Mikroskop soll eine stärkere Vergrößerung liefern, als mit der Lupe allein möglich wäre (siehe Abb. 2.18 auf Seite 258). Dazu werden zwei Sammellinsen verwendet: die erste (das »Objektiv«) hat

eine kurze Brennweite und wird als Projektionslinse eingesetzt, um ein vergrößertes, umgekehrtes, reelles Zwischenbild vom Gegenstand zu werfen, wobei sich der Gegenstand zwischen der ersten und der zweiten Brennweite befindet (siehe Seite 241, Fall 2).

Dieses Zwischenbild wird dann durch die zweite Linse (»Okular«) betrachtet, wobei diese als Lupe benutzt wird, das Zwischenbild liegt in ihrer Brennebene. (Bei Projektionsmikroskopen wird das Zwischenbild knapp außerhalb der Brennebene der 2. Linse gestellt, es wird wieder ein vergrößertes, reelles Bild z. B. auf eine Photoplatte oder einen Bildschirm geworfen).

Die Gesamtvergrößerung des Mikroskops ist das Produkt der Vergrößerungen der einzelnen Linsen. Die Lage des Zwischenbildes ist durch die Konstruktion des Mikroskops (»Tubuslänge« t) festgelegt (siehe Abb. 2.18).

Es gilt (aus ähnlichen Dreiecken):

$$\frac{G}{f_{\mathrm{Ob}}} = \frac{ZB}{t} \,,$$

wo f_{Ob} die Brennweite des Objektivs, t die »Tubuslänge« und ZB die Größe des Zwischenbildes sind. Damit ist $\Gamma_1 = ZB/G = t/f_{\mathrm{Ob}}$. Die Vergrößerung Γ_2 des Okulars ist gegeben durch die Vergrößerung einer Lupe, $\Gamma_2 = s_0/f_{\mathrm{Ob}}$. Die Gesamtvergrößerung ist dann $\Gamma = \Gamma_1 \cdot \Gamma_2 = ts_0/f_{\mathrm{Ob}}f_{\mathrm{Ok}}$ (typischer Wert: $200 \cdot 250/(4 \cdot 10) = 1250\,\times$, alle Größen in mm). Man könnte sie scheinbar beliebig groß machen, indem man die Brennweiten der Linsen sehr klein und die Tubuslänge des Instruments sehr groß wählte.

In der Praxis ist die nutzbare Vergrößerung jedoch durch die Beugung begrenzt: das Auflösungsvermögen des Mikroskops ist definiert als $A = 1/d$, $d \mathrel{\widehat{=}}$ dem kleinsten auflösbaren Abstand zwischen zwei Punkten im Gegenstand. Dieser Abstand ist begrenzt durch die Breite der Beugungsscheibchen, welche die beiden Punkte im Zwischenbild erzeugen. Anstelle des Rayleigh'schen Kriteriums (siehe oben),

verwendet man für das Mikroskop das Abbe'sche Kriterium:

$$d \geq \frac{\lambda}{A_{\mathrm{N}}} \, ,$$

wo A_{N} die »numerische Apertur« des Objektivs ist:

$$A_{\mathrm{N}} = N \sin \varepsilon \, ,$$

mit $N \equiv$ Brechungsindex des Mediums zwischen Gegenstand und Objektiv (Verkleinerung der Wellenlänge λ im Medium mit $N > 1$!) und $\varepsilon \equiv$ halber Öffnungswinkel des Objektivs vom Gegenstand aus gesehen ($\tan \varepsilon \approx R/f_{\mathrm{Ob}}$, $R =$ Radius des Objektivs).

Praktisch ist $A_{\mathrm{N}} \approx 1$, so daß $d \geq \lambda$; durch Beugung ist der kleinste auflösbare Abstand von einem konventionellen Lichtmikroskop etwa gleich der Lichtwellenlänge, typisch 600 nm.

2.4.5 Spektralapparate

Ein Spektralapparat dient dazu, Licht (oder andere Strahlung) in seine Frequenz- bzw. Wellenlängenkomponenten zu zerlegen. Zwei gängige Methoden verwenden entweder die Dispersion bei der Brechung (Wellenlängenabhängigkeit des Brechungsindizes N) in einem Prismenspektrometer, oder die Wellenlängenabhängigkeit der Beugung in einem Gitterspektrometer. Ein Spektrometer registriert die Intensität als Funktion der Strahlungsfrequenz oder Wellenlänge (Spektrum); ein Spektrograph erzeugt ein Bild des Spektrums, z. B. auf einer Photoplatte; ein Monochromator trennt eine bestimmte Frequenz- oder Wellenlängenkomponente aus dem vorhandenen Spektrum heraus (siehe Abb. 2.19 auf Seite 259).

Die Abbildung 2.19 auf Seite 259 zeigt einen Gittermonochromator schematisch: mit Hilfe eines Reflektionsgitters G wird das durch den Eintrittsspalt E einfallende weisse Licht in seine Spektralfarben

zerlegt, die einzeln auf den Austrittsspalt A fokussiert werden können. Die Auswahl der Wellenlänge geschieht durch Drehung des Gitters. Die Spektralauflösung $\lambda/\mathrm{d}\lambda$ eines Spektralapparats bezeichnet seine Fähigkeit, zwei benachbarte Wellenlängen (λ und $\lambda + \mathrm{d}\lambda$) zu trennen; $\mathrm{d}\lambda$ ist die kleinste Wellenlängendifferenz, die noch aufzulösen ist. Die Abbildung 2.20 auf Seite 260 zeigt die Trennung bei der 1. und der 2. Ordnung des Gitterbeugungsbildes.

Wenn wir das Rayleigh'sche Kriterium für die Auflösung der Hauptmaxima der beiden Wellenlängen anwenden, erhalten wir $\lambda/\mathrm{d}\lambda = mp$, m = Ordnung der Maxima und p = Anzahl der Spalte oder Gitterstriche (dies gilt für beliebig schmale Ein- und Austrittsspalte und N Gitterspalte pro Längeneinheit, wo $N = 1/g = p/B$, g = Gitterkonstante $\widehat{=}$ Spaltabstand und B = Gesamtbreite des Gitters). Man kann die Auflösung also durch Erhöhung der Strichzahl oder durch Erhöhung der Ordnung verbessern, wobei letzteres auf Kosten der Lichtintensität geht.

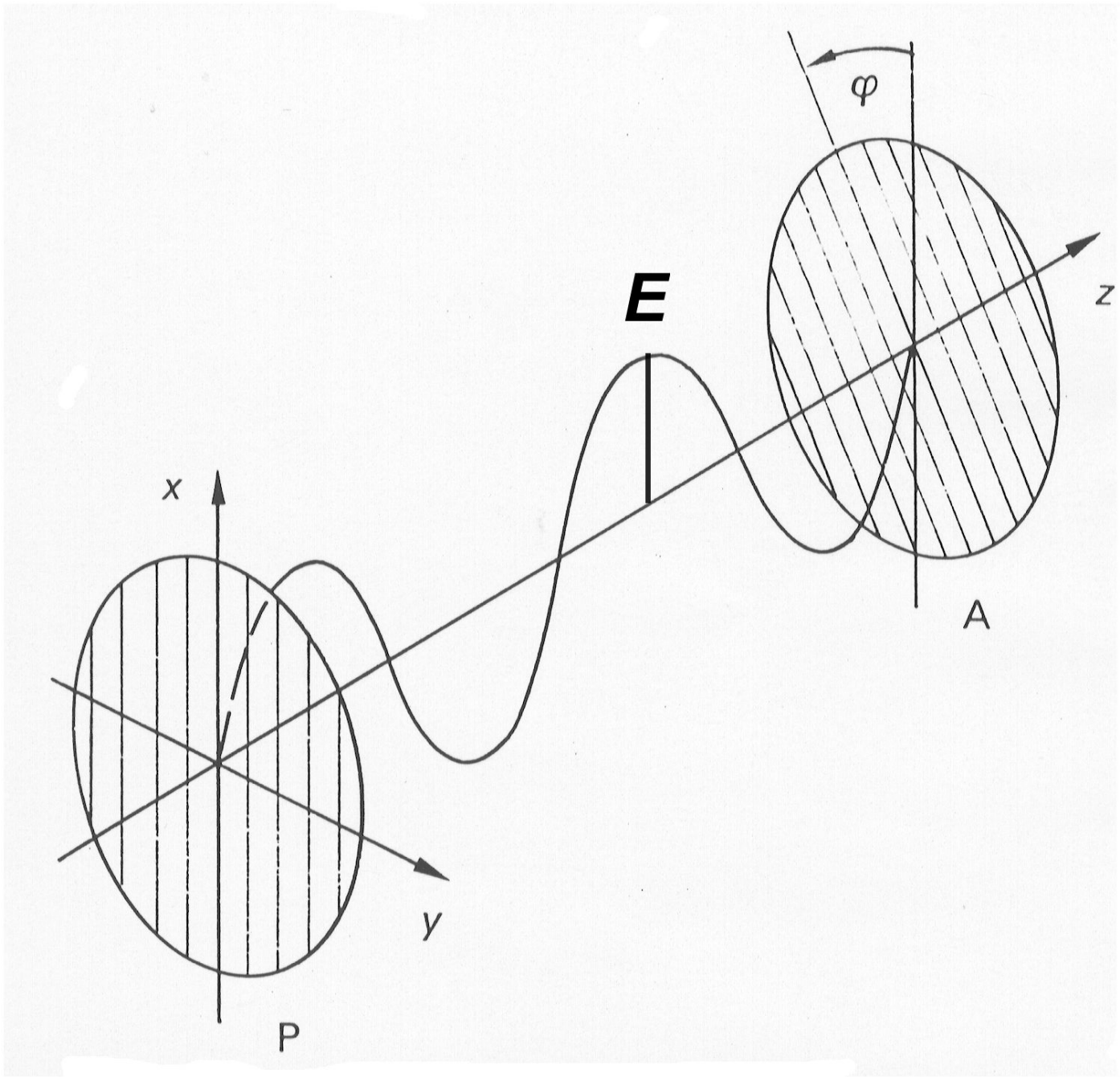


Abbildung 2.8. Darstellung einer linearpolarisierten Lichtwelle: die Welle breitet sich in $+z$-Richtung aus, ihr elektrischer Feldvektor E schwingt nur in $+x$-Richtung aufgrund des »Polarisators« P. Eine eventuelle Drehung der Polarisationsebene ist als Winkel φ in der A (»Analysator«) gezeichnet.

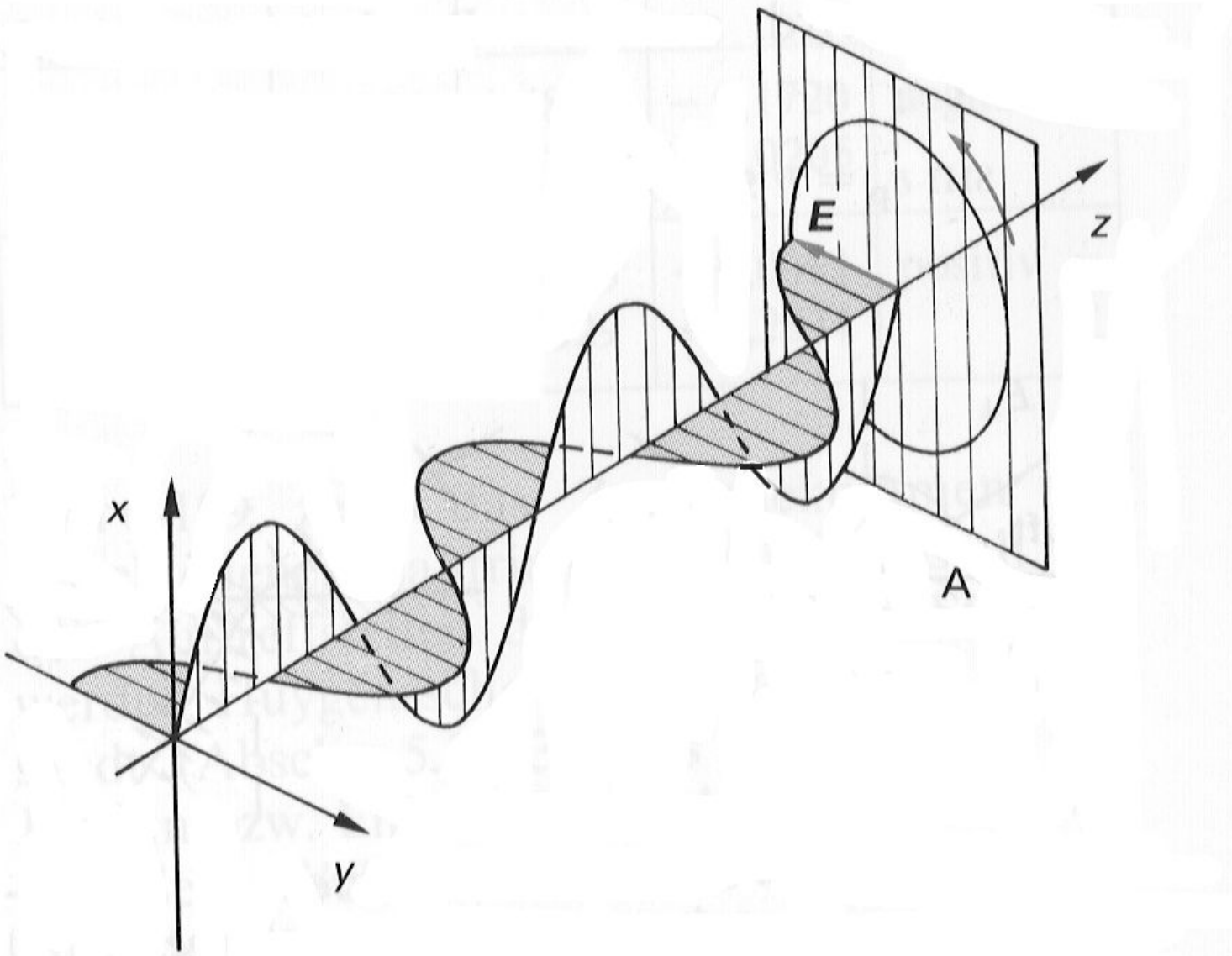


Abbildung 2.9. Eine zirkularpolarisierte Lichtwelle die sich in $+z$-Richtung ausbreitet: zwei linearpolarisierte Wellen E_σ und E_π, mit ihren elektrischen Feldvektoren senkrecht zueinander, haben eine relative Phasenverschiebung von $\Delta\varphi = -\lambda/4$. Der resultierende elektrische Feldvektor

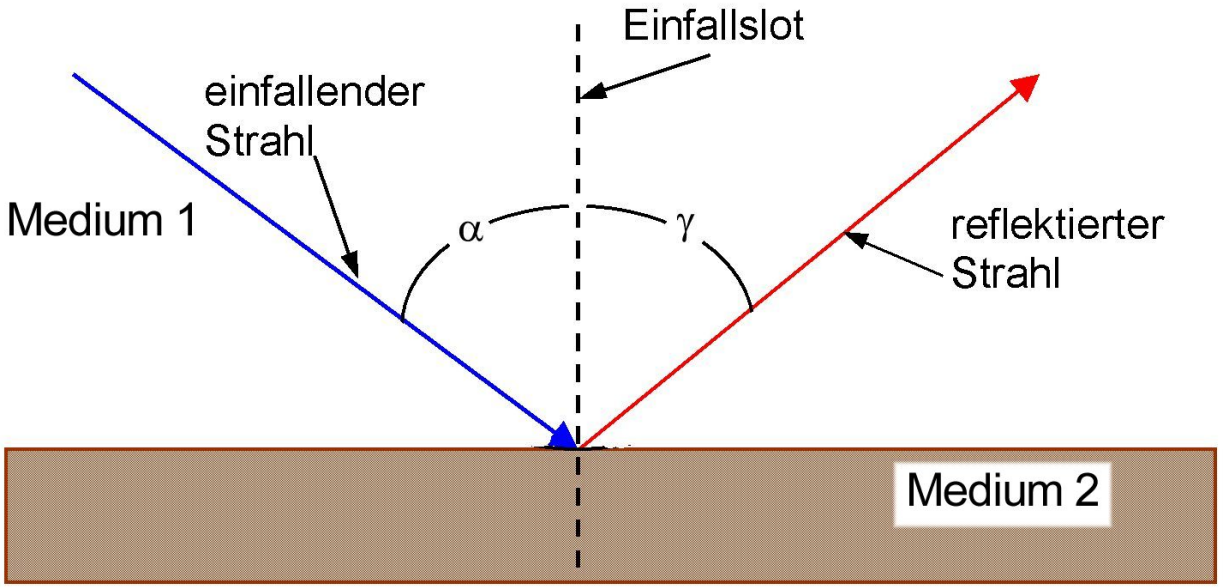


Abbildung 2.10. Reflexion eines Lichtstrahls

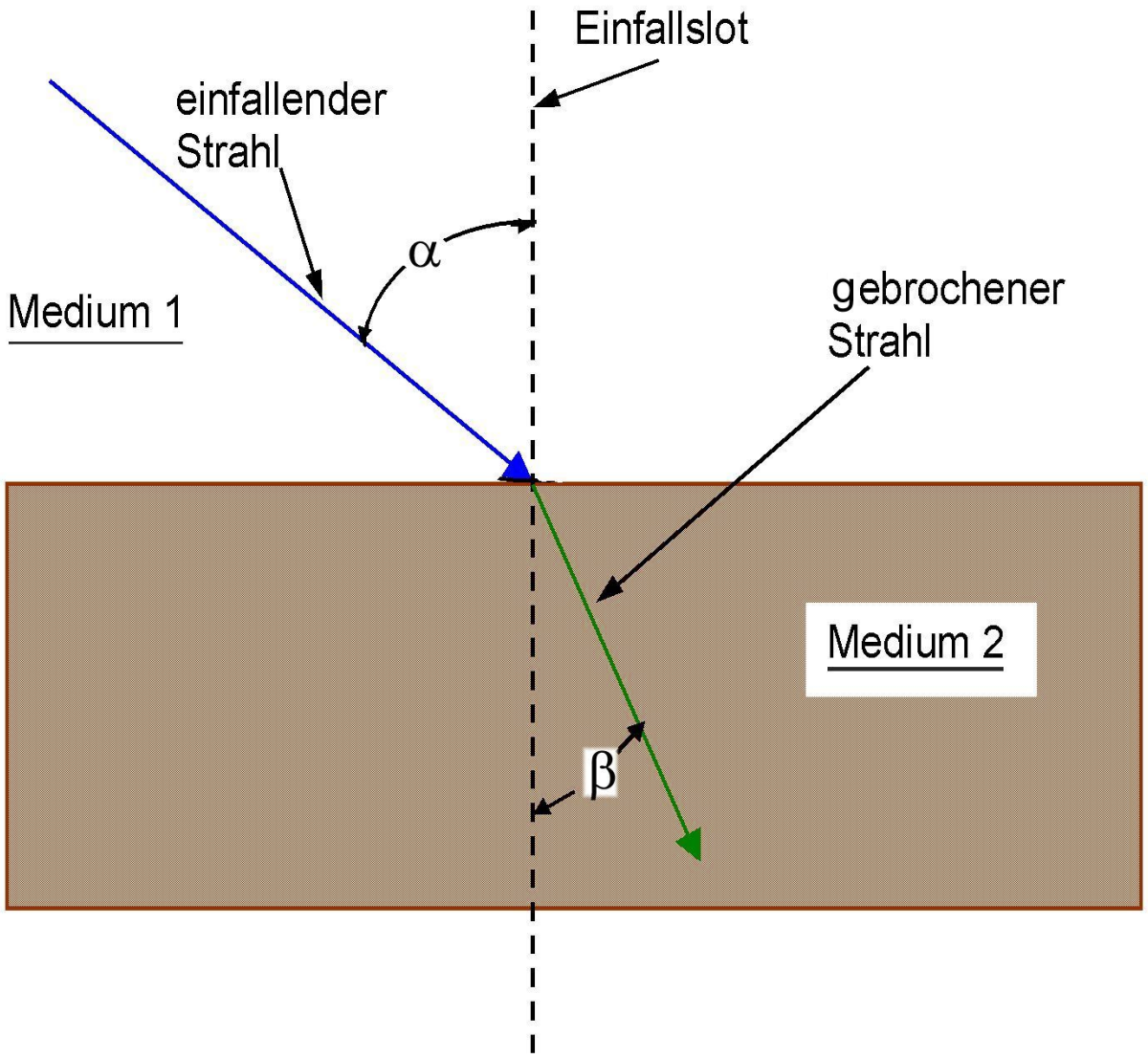


Abbildung 2.11. Brechung eines Lichtstrahls

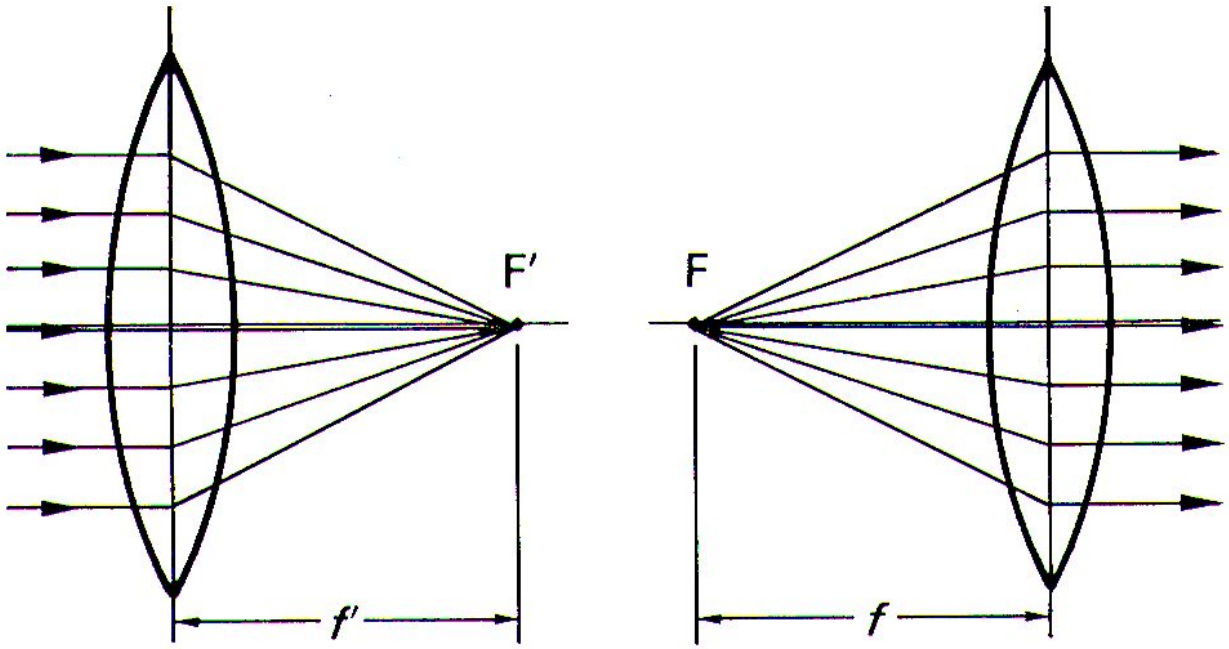


Abbildung 2.12. Zwei Sammellinsen: links kommen parallele Strahlen von der Vorderseite der Linse, sie werden im hinteren Brennpunkt F' gesammelt; rechts kommen Strahlen von einer Punktquelle am vorderen Brennpunkt F, sie werden zu Parallelstrahlen hinter der Linse gemacht (Linse als Kondensor).

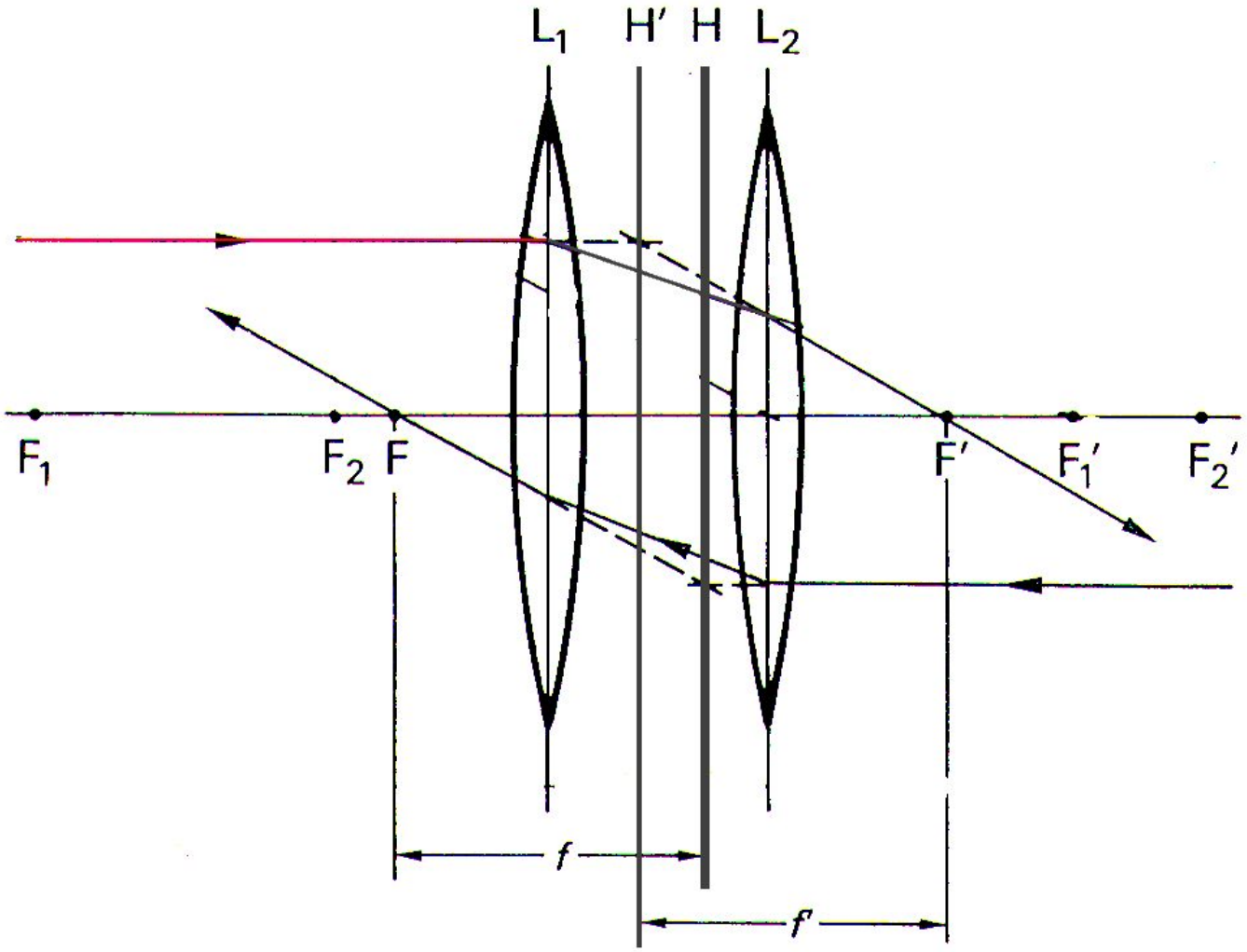


Abbildung 2.13. Zwei Linsen hintereinander auf der gleichen optischen Achse. Von links kommende Strahlen (Pfeile) brechen an den beiden Hauptebenen L_1 und L_2; dies kann als Brechung durch eine einzige, stärkere Linse mit der Hauptebene H' und Brennweite f' aufgefaßt werden. Strahlen von rechts werden scheinbar an der Hauptebene H gebrochen

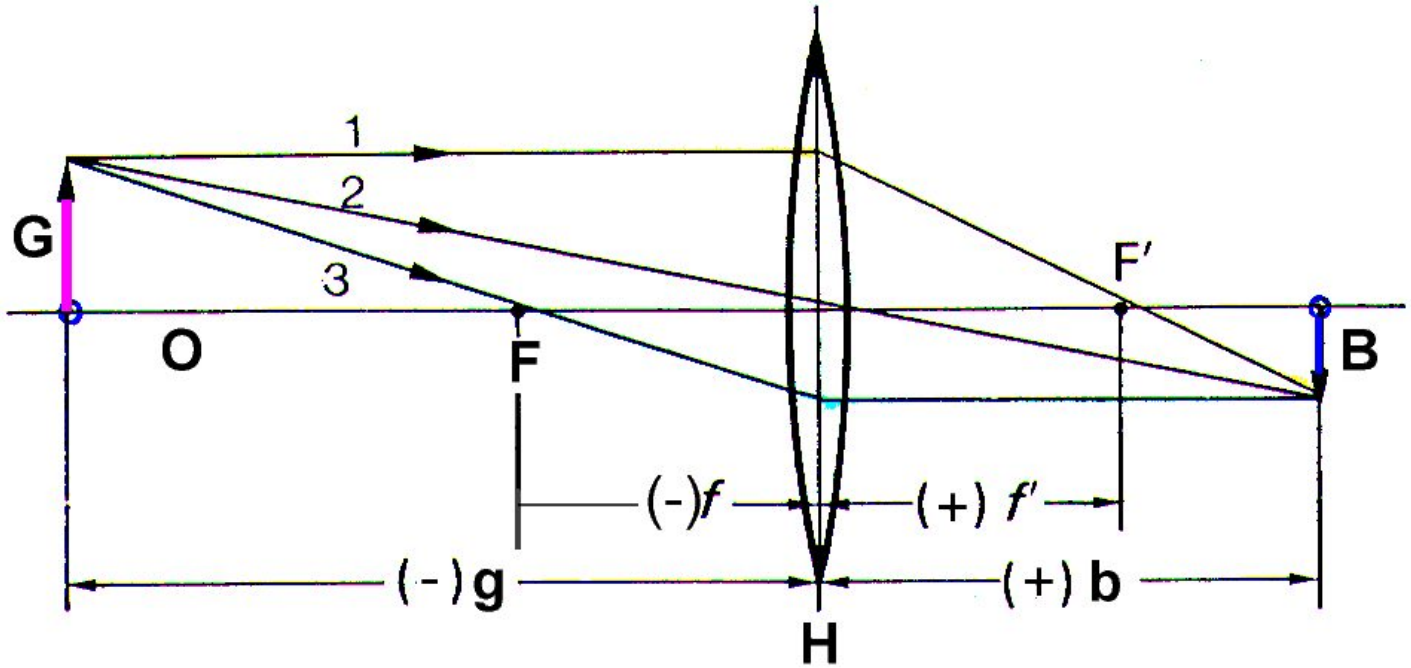


Abbildung 2.14. Abbildung durch eine Sammellinse der Brennweite f und Brechkraft $D = 1/f$, mit optischer Achse O und Hauptebene H. Im Abstand $(-)g$ vor der Hauptebene steht ein Gegenstand der Größe G; er wird hinter der Linse als reelles Bild der Größe B im Abstand b abgebildet.

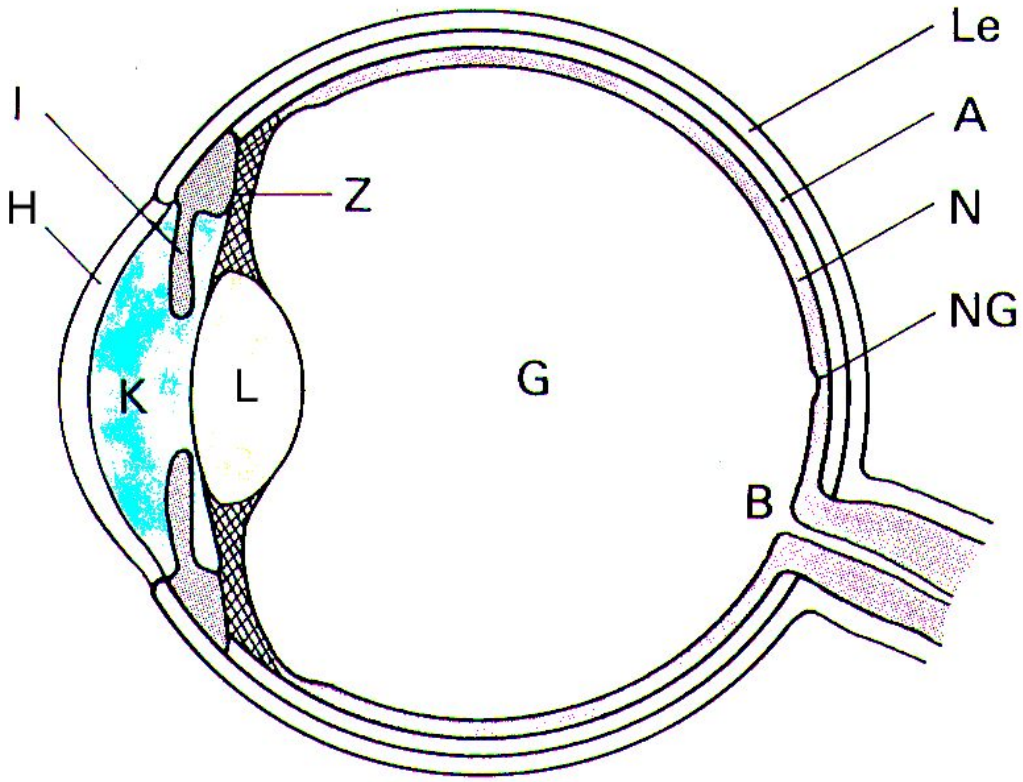


Abbildung 2.15. Schnitt durch ein Auge. Die Hornhaut H bildet die erste brechende Fläche; dahinter befindet sich das Kammerwasser K. Die Öffnung zur Linse L ist variabel (Pupillengröße) und begrenzt durch die Iris I. Die Linse ändert ihre Krümmung (Akkomodation), je nach Spannung der Ziliarmuskulatur Z. Hinter der Linse befindet sich der Glaskörper G. Die Nervenrezeptoren (Zapfen, Stäbchen) sind in der Netzhaut N angeordnet. Den Außenkörper vom Auge bilden die Lederhaut Le und die Aderhaut A. Der Ausgang der Sehnerven befindet sich am »blinden Fleck« B, die größte Dichte der Zapfen in der Netzhautgruppe NG (fovea), wo ein Bild am schärfsten wahrgenommen wird

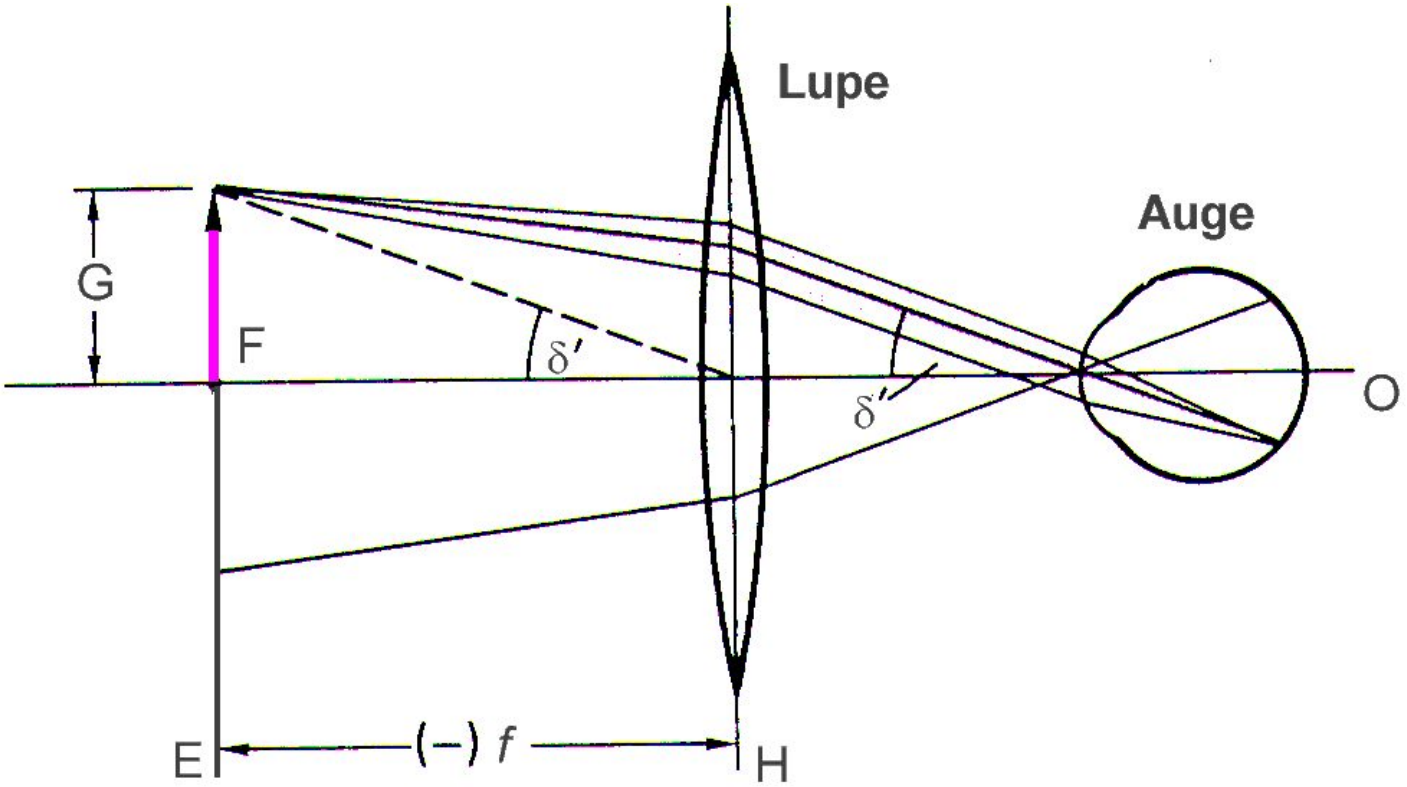


Abbildung 2.16. Wirkungsweise einer Lupe. Der Gegenstand (Größe G) steht in der Brennebene der Lupe, die von ihm ausgehenden Strahlen werden zu Parallelstrahlen gemacht. Diese werden durch das (entspannte) Auge betrachtet, wobei ein reelles Bild auf der Netzhaut entsteht. Der Betrachter »sieht« ein virtuelles, vergrößertes Bild im Unendlichen, mit dem Sehwinkel δ'.

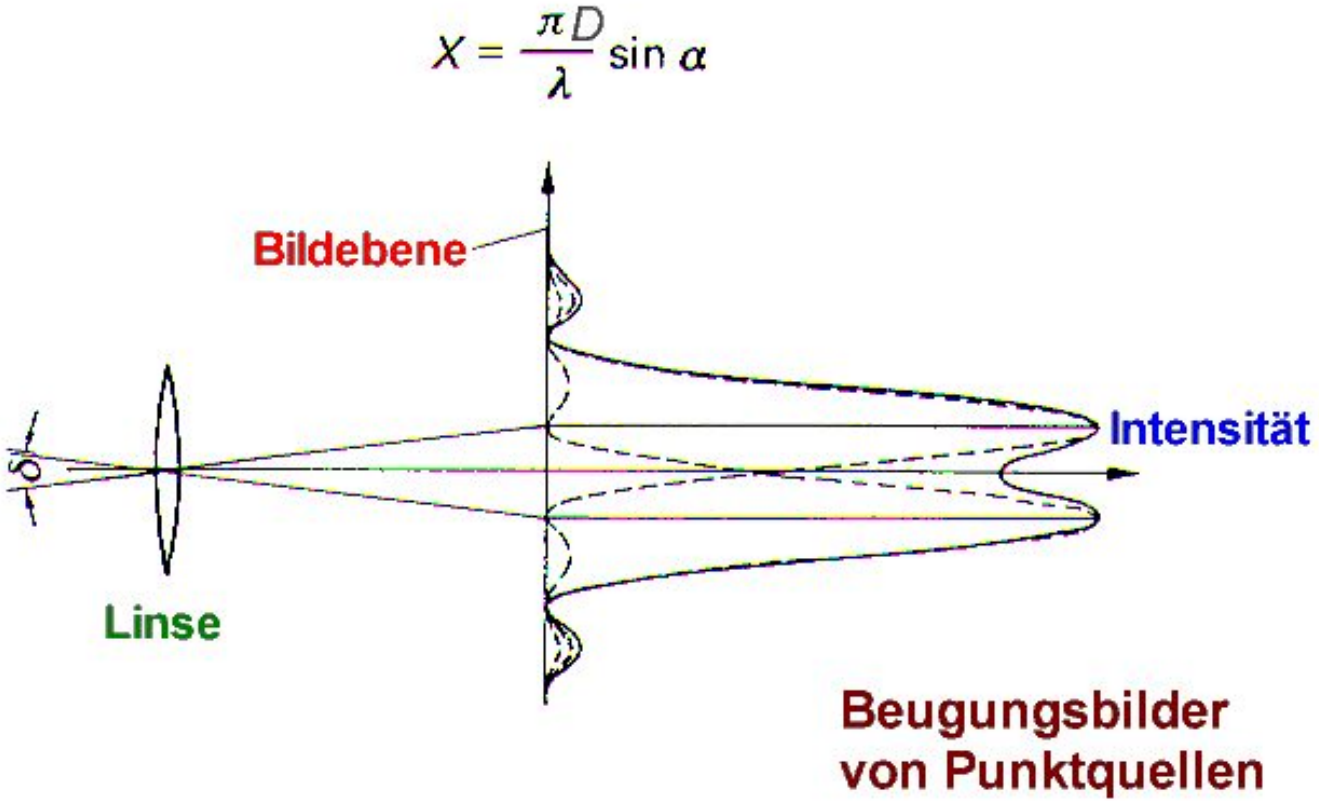


Abbildung 2.17. Auflösung von zwei Punkten im Gegenstand (Mindestsehwinkel δ nach dem Rayleigh'schen Kriterium). Die Punkte werden in der Bildebene (z. B. auf der Netzhaut im Auge) jeweils als Beugungsbilder abgebildet; die Breite der Beugungsbilder hängt von der Größe der Öffnung (Pupille, Linse) sowie von der Lichtwellenlänge λ ab. Wenn die Beugungsbilder zu stark überlappen, »verschmelzen« die beiden Punkte im Bild, sie können nicht mehr aufgelöst werden. Hier ist das Beugungsmaximum vom 2. Punkt genau im 1. Minimum des Beugungsbildes vom 1. Punkt, entsprechend dem Rayleigh'schen Kriterium.

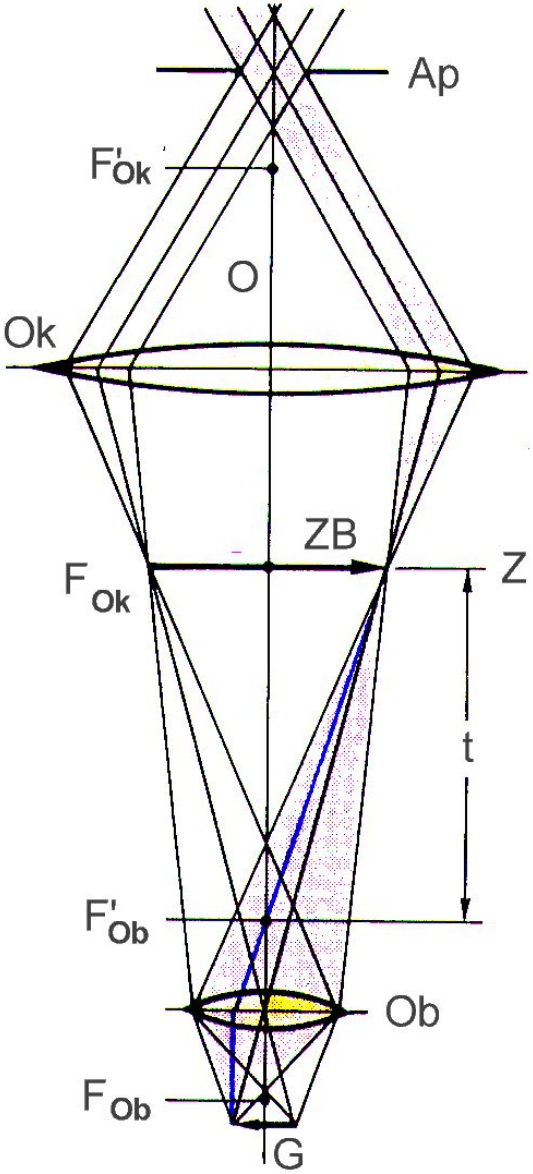


Abbildung 2.18. Mikroskop (schematisch): der Gegenstand der Größe G liegt knapp außerhalb der 1. Brennweite der Objektivlinse Ob auf der optischen Achse O. Die Objektivlinse wirft das Zwischenbild der Größe ZB in der Ebene Z, welche um die Tubuslänge t vom hinteren Brennpunkt F'_{Ob} des Objektivs entfernt ist ($t \simeq$ typ. 200 mm). Z ist gleichzeitig die Brennebene der Okularlinse Ok; diese wirkt als Lupe und wirft parallele Lichtstrahlen vom Zwischenbild ins Auge des Betrachters (durch die Apertur Ap).

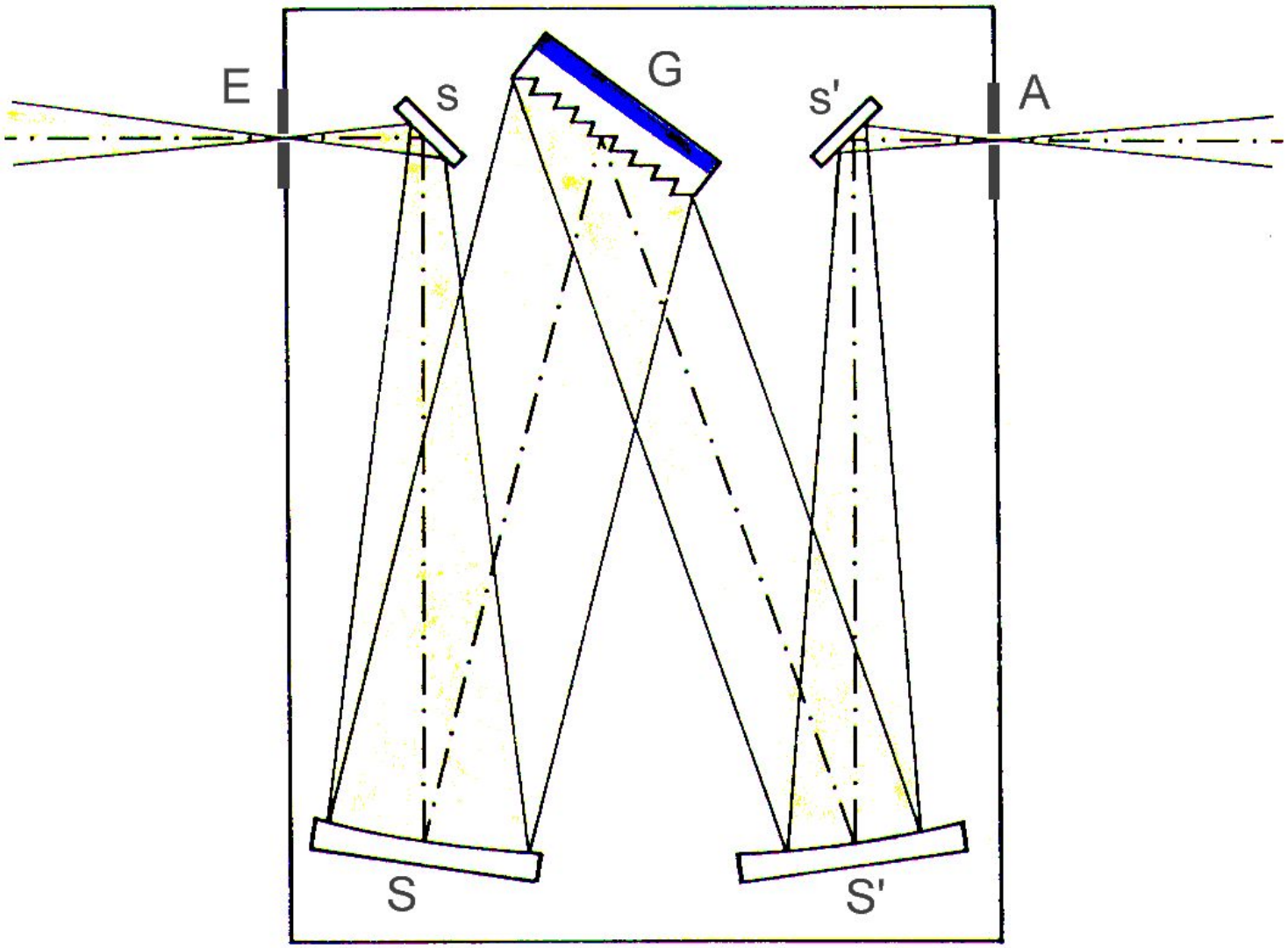


Abbildung 2.19. Gittermonochromator: schematische Darstellung. s und s' sind Planspiegel, S und S' Konkavspiegel, E und A der Eintritts- und Austrittsspalt, G das Beugungsgitter.

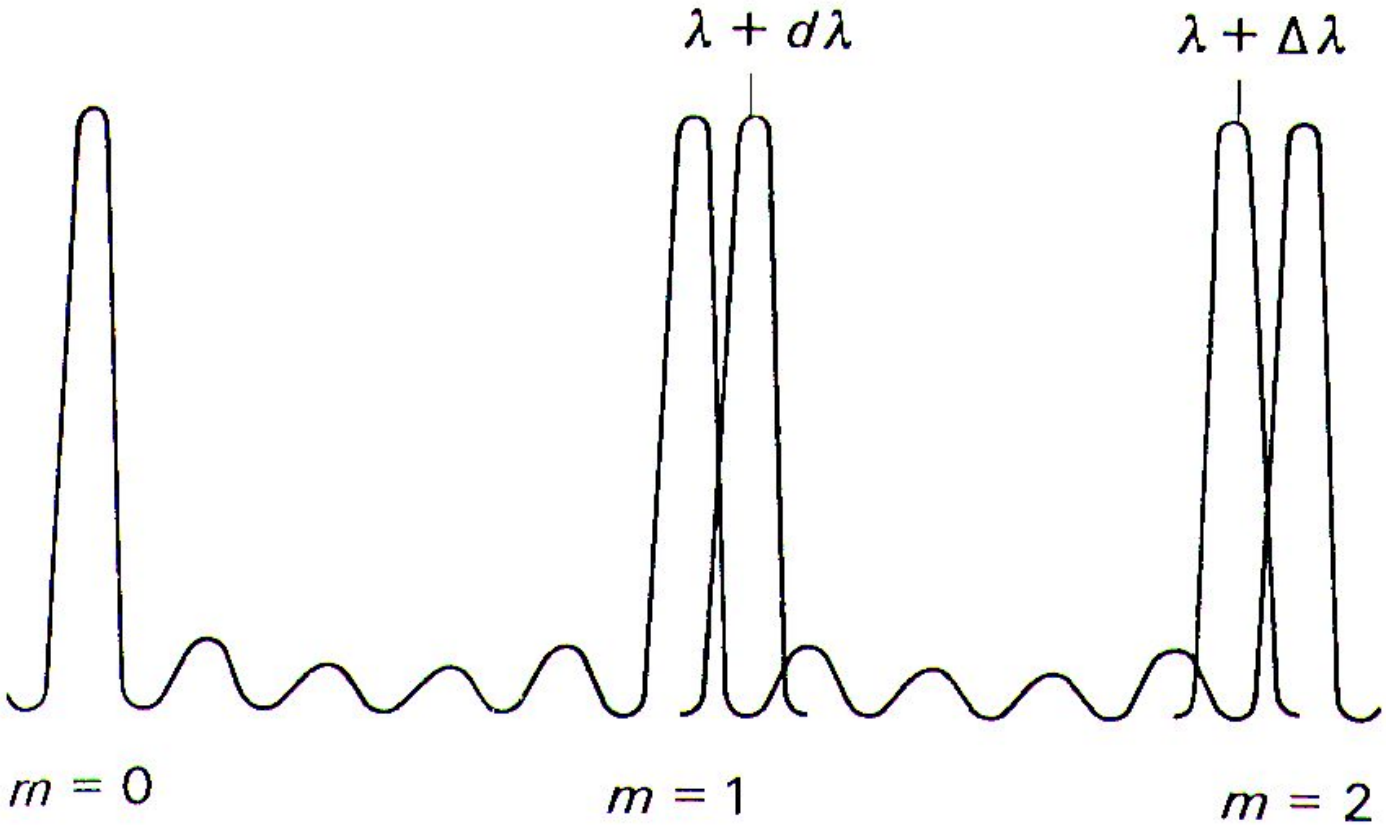


Abbildung 2.20. Spektralauflösung eines Gittermonochromators. Die Intensitätsverteilung (schematisch) von einem Beugungsgitter mit Hauptmaxima der 0., 1. und 2. Ordnung für zwei benachbarte Wellenlängen.