

Ein Raumviereck ABCD kann
eben sein oder aus zwei
gegeneinander geneigten
Dreiecken bestehen. In einem
ebenen Viereck schneiden sich
die Diagonalen. Überprüfen
Sie, ob die gegebenen
Vierecke eben sind.

A(3/1/2)

B(6/2/2)

C(5/9/4)

D(1/4/3)

Bilde Richtungsvektor der
Geraden durch A,B:

$$\overrightarrow{AB} = \vec{B} - \vec{A} = \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Geradengleichung für g_{AB} :

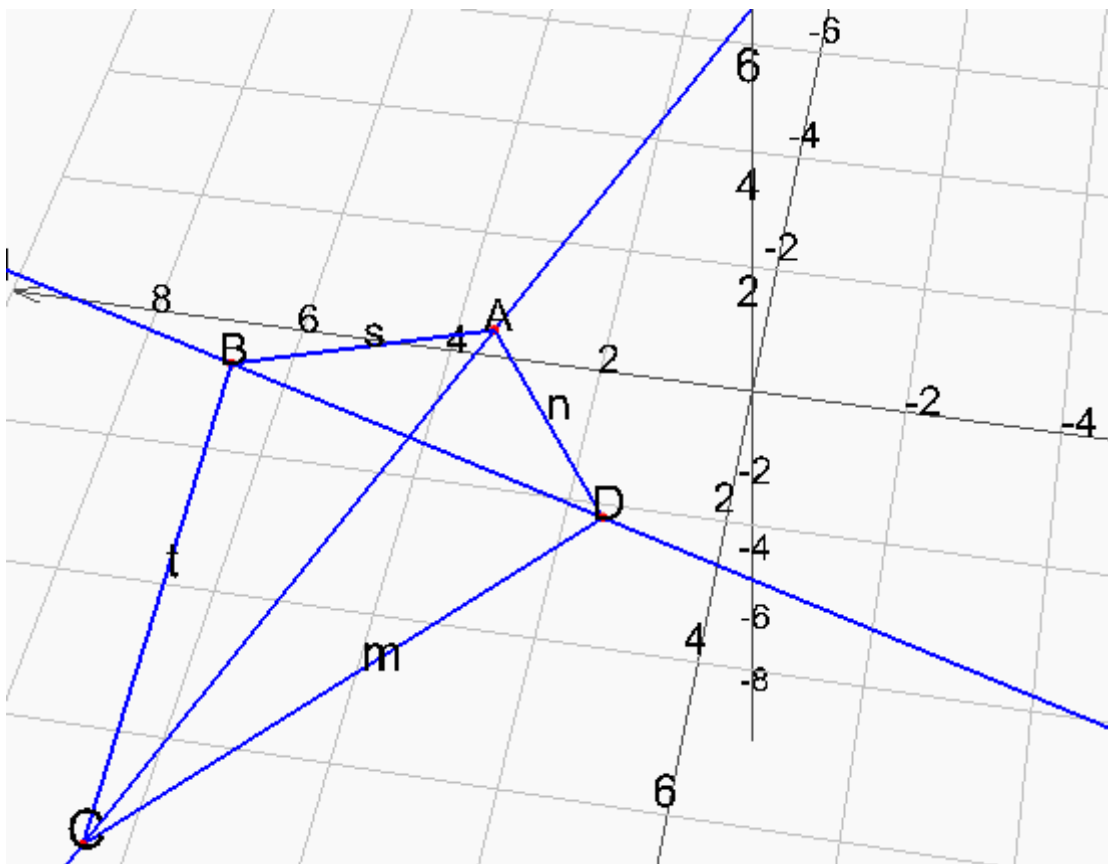
$$g_{AB}: \quad \vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, r \in \mathbb{R}$$

Bilde Richtungsvektor der
Geraden durch C,D:

$$\vec{CD} = \vec{D} - \vec{C} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 5 \\ 9 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ -5 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Geradengleichung für g_{CD} :

$$g_{CD}: \vec{x} = \begin{pmatrix} 5 \\ 9 \\ 4 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} -4 \\ -5 \\ -1 \end{pmatrix}, s \in \mathbb{R}$$



Schnittpunkt? Löse Gleichung

$$\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 9 \\ 4 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} -4 \\ -5 \\ -1 \end{pmatrix} \quad \text{nach } r, s \text{ auf.}$$

Schreibe als Gleichungssystem:

$$\text{I} \quad 3 + 3r = 5 - 4s$$

$$\text{II} \quad 1 + r = 9 - 5s$$

$$\text{III} \quad 2 = 4 - s$$

Löse III nach s auf:

$$2 = 4 - s \quad / -4$$

$$-2 = -s \quad / :(-1)$$

$$2 = s$$

Setze $s=2$ in II ein, löse nach r auf:

$$1 + r = 9 - 5 \cdot 2 \quad / -1$$

$$r = -2$$

Setze $s=2$ und $r=-2$ in I ein:

$$3 + 3 \cdot (-2) = 5 - 4 \cdot 2$$

$$-3 = -3$$

→ wahr, schneiden sich → eben

Bekanntlich schneiden sich die
Seitenhalbierenden eines
Dreiecks in einem Punkt S.
Berechnen Sie den Punkt S
für das abgebildete Dreieck.

Bestimme durch Hinschauen
Eckpunkte A,B,C des Dreiecks:

A(0/0/4)

B(6/0/0)

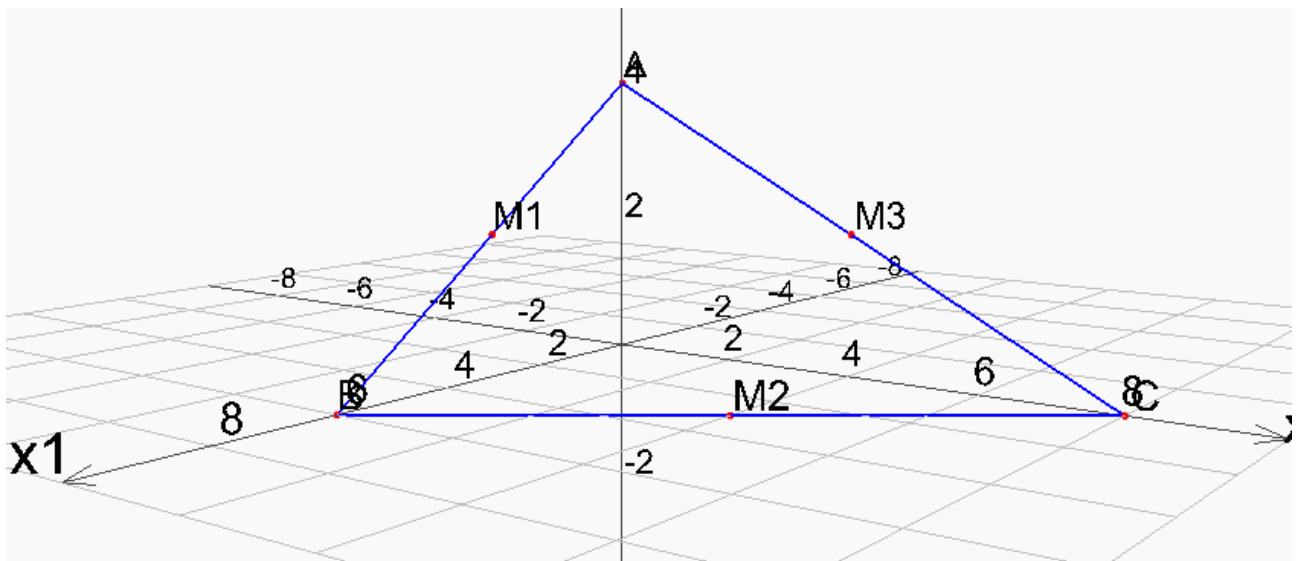
C(0/8/0)

Bestimme Mittelpunkte
M1,M2,M3 der Seiten des
Dreiecks:

$$M1: \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \rightarrow M1(3/0/2)$$

$$M2: \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 8 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} \rightarrow M2(3/4/0)$$

$$M3: \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 8 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} \rightarrow M3(0/4/2)$$



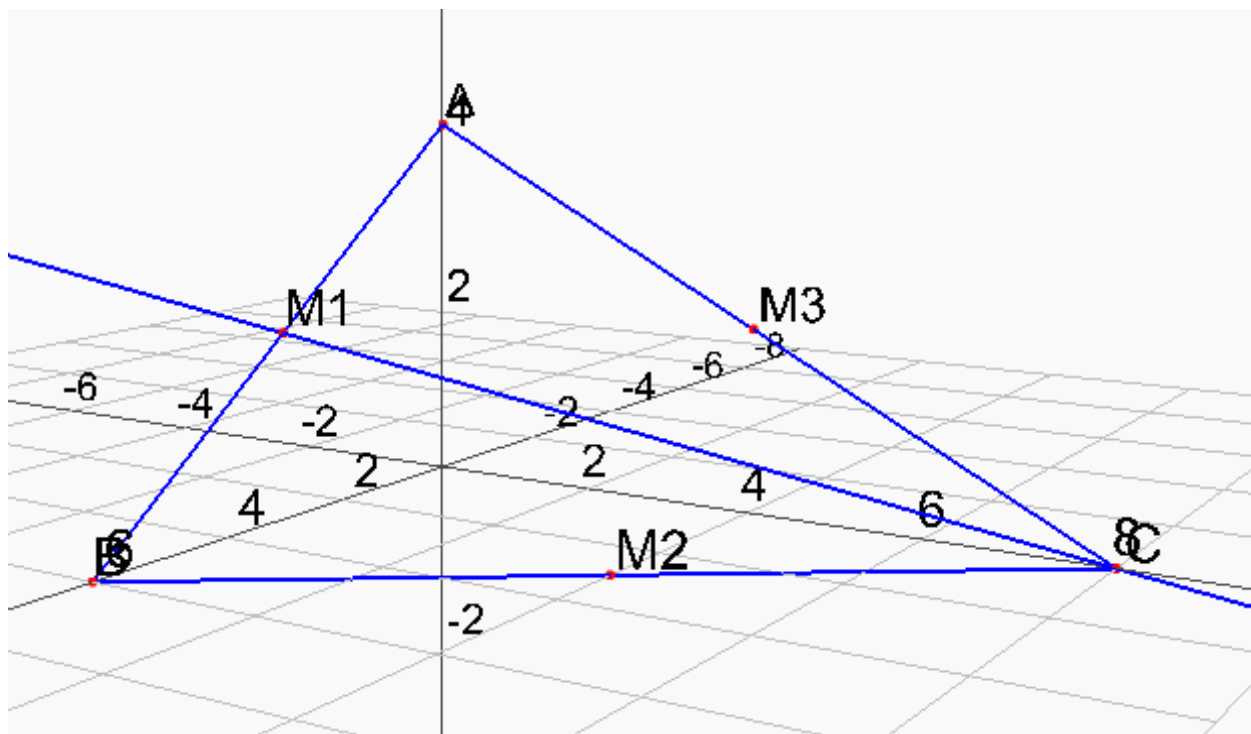
Bestimme Geradengleichung einer
Seitenhalbierenden, hier z.B. die
durch M1 und C verläuft.

Bilde dazu zuerst den Richtungsvektor der
Geraden durch C,M1:

$$\overrightarrow{CM1} = \vec{M1} - \vec{C} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 8 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -8 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Geradengleichung fur g_{CM1}:

$$g_{CM1}: \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 8 \\ 0 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -8 \\ 2 \end{pmatrix}, r \in \mathbb{R}$$



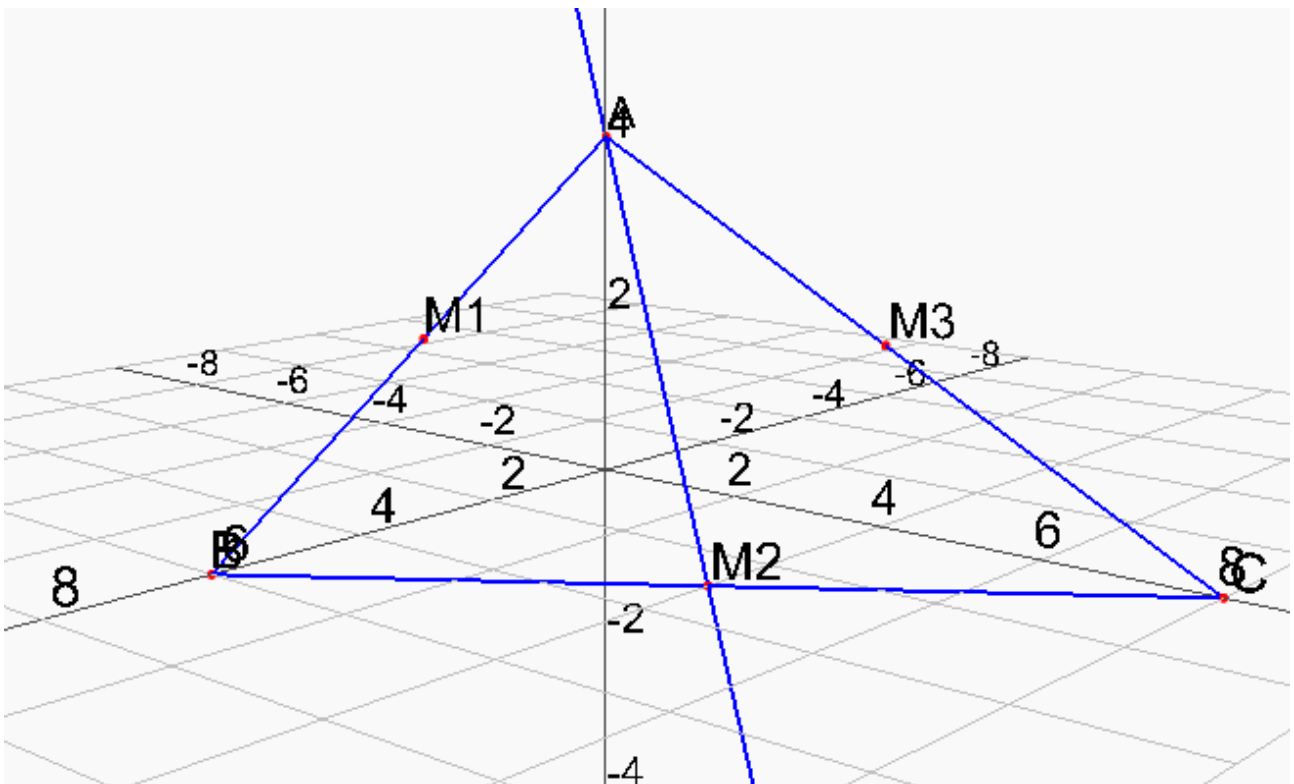
Bestimme Geradengleichung einer
Seitenhalbierenden, hier z.B. die
durch A und M2 verläuft.

Bilde dazu zuerst den Richtungsvektor der
Geraden durch A,M2:

$$\overrightarrow{AM2} = \vec{M2} - \vec{A} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ -4 \end{pmatrix}$$

Geradengleichung fur g_{AM2}:

$$g_{AM2}: \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ -4 \end{pmatrix}, s \in \mathbb{R}$$



Berechne Schnittpunkt S der Geraden:

Löse $\begin{pmatrix} 0 \\ 8 \\ 0 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -8 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ -4 \end{pmatrix}$ nach r, s auf:

Schreibe als Gleichungssystem:

$$\text{I} \quad 3r = 3s$$

$$\text{II} \quad 8 - 8r = 4s$$

$$\text{III} \quad 2r = 4 - 4s$$

Löse I nach s auf:

$$3r = 3s \quad /:3$$

$$r = s$$

Setze $r=s$ in II ein, löse nach r auf:

$$8 - 8r = 4r \quad /+8r$$

$$8 = 12r \quad /:12$$

$$2/3 = r$$

Bestimme Schnittpunkt S durch Einsetzen eines der Parameter s oder r in die Gleichung:

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 8 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{2}{3} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -8 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ \frac{8}{3} \\ \frac{4}{3} \end{pmatrix} \rightarrow \mathbf{S(2 / 2.66 / 1.33)} \text{ (gerundet)}$$

Flugzeug Alpha fliegt gradlinig durch die beiden Punkte $A(-8/3/2)$ und $B(-4/-1/4)$. Eine Einheit im Koordinatensystem entspricht 1km. Der Flughafen F befindet sich in der x-y-Ebene.

a) In welchem Punkt F ist das Flugzeug gestartet? In welchem Punkt T erreicht es seine Reiseflughöhe von 10.000m?

b) Flugzeug Beta steuert Punkt $C(10/-10/5)$ in Richtung $\vec{v} = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ an.

Zeigen Sie, dass die beiden Flugzeuge keinesfalls kollidieren können. In dem Moment, an dem Flugzeug Alpha den Punkt B passiert, erreicht Flugzeug Beta den Punkt C. Wie groß ist die Entfernung der Flugzeuge zu diesem Zeitpunkt?

Vom Punkt F(x/y/z) ist bekannt, dass er in der x-y-Ebene liegt und daher die z-Koordinate den Wert 0 (=Höhe) haben muss. Daher: F(x/y/0).

Wir bilden die Gerade als Flugbahn von Alpha durch A,B. Wir wissen, dass F auf der Geraden liegen muss.

Bilde zuerst Richtungsvektor durch A,B:

$$\vec{AB} = \vec{B} - \vec{A} = \begin{pmatrix} -4 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -8 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -4 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Geradengleichung für g_{AB}:

$$g_{AB}: \vec{x} = \begin{pmatrix} -8 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ -4 \\ 2 \end{pmatrix}, s \in \mathbb{R}$$

F einsetzen: $\begin{pmatrix} x \\ y \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -8 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ -4 \\ 2 \end{pmatrix}$.3. Zeile nach s auflösen:

$$0 = 2 + 2s \quad /-2$$

$$-2 = 2s \quad /:2$$

$$-1 = s$$

$$\text{Setze } s=-1 \text{ in } g \text{ ein: } \begin{pmatrix} -8 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} + (-1) \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ -4 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -12 \\ 7 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\rightarrow \mathbf{F(-12/7/0)}$$

Reiseflughöhe $10.000\text{m} = 10\text{km}$ bedeutet, dass die z-Koordinate den Wert 10 (=Höhe) haben muss. Daher: $T(x/y/10)$.

Wir bilden die Gerade als Flugbahn von Alpha durch A,B. Wir wissen, dass F auf der Geraden liegen muss.

Bilde zuerst Richtungsvektor durch A,B:

$$\vec{AB} = \vec{B} - \vec{A} = \begin{pmatrix} -4 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -8 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -4 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Geradengleichung für g_{AB} :

$$g_{AB}: \vec{x} = \begin{pmatrix} -8 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ -4 \\ 2 \end{pmatrix}, s \in \mathbb{R}$$

T einsetzen: $\begin{pmatrix} x \\ y \\ 10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -8 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ -4 \\ 2 \end{pmatrix}$.3. Zeile nach s auflösen:

$$10 = 2 + 2s \quad /-2$$

$$8 = 2s \quad /:2$$

$$4 = s$$

$$\text{Setze } s=4 \text{ in } g \text{ ein: } \begin{pmatrix} -8 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} + 4 \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ -4 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ -13 \\ 10 \end{pmatrix}$$

$$\rightarrow T(8/-13/10)$$

Kollisionskurs der Flugzeuge:
Prüfe, ob es einen Schnittpunkt der
beiden Geraden für die Flugzeuge
Alpha und Beta gibt:

$$g: \vec{x} = \begin{pmatrix} -8 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ -4 \\ 2 \end{pmatrix}, s \in \mathbb{R} \quad \text{Flugbahn von Alpha}$$

$$h: \vec{p} = \begin{pmatrix} 10 \\ -10 \\ 5 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, r \in \mathbb{R} \quad \text{Flugbahn von Beta}$$

Betrachte die Richtungsvektoren: Sie sind Vielfache voneinander, daher sind g und h parallel. Es gibt keinen Schnittpunkt, man muss keine Kollision befürchten.

Entfernung der Flugzeuge Alpha und Beta: Es ist der Abstand der beiden Punkte B und C gesucht:

$$\begin{aligned} d(B,C) &= \sqrt{((-4-10)^2 + (-1-(-10))^2 + (4-5)^2)} = \sqrt{((-14)^2 + 9^2 + (-1)^2)} \\ &= \sqrt{(196+81+1)} = \sqrt{278} \quad . \text{Der Abstand beträgt ca. 16.67km.} \end{aligned}$$

Die Position von Flugzeugen im Luftraum kann man durch Punkte in einem räumlichen Koordinatensystem beschreiben, bei dem die als Ebene betrachtete Erdoberfläche in der x_1x_2 -Ebene liegt. Ein Passagierflugzeug bewegt sich auf einem als gradlinig angenommenen Kurs von Punkt $P(8,5/-28,7,5)$ pro Sekunde um $\vec{v} = \begin{pmatrix} -0.12 \\ 0.175 \\ 0 \end{pmatrix}$. Zum

gleichen Zeitpunkt, in den sich das Passagierflugzeug im Punkt P befindet, fliegt ein zweites Flugzeug von Punkt $Q(22/15,5/7,3)$ aus gradlinig so weiter, dass es sich pro Sekunde um den Vektor $\vec{w} = \begin{pmatrix} 0.1 \\ -0.05 \\ 0.001 \end{pmatrix}$

bewegt (alle Längenangaben in km).

- a) Untersuchen Sie ob es auf den beiden Flugbahnen zu einer Kollision kommen kann.
- b) Geben Sie die Geschwindigkeit der beiden Flugzeuge an.

Aufstellen der Geraden g für das
Passagierflugzeug: g: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 8,5 \\ -28 \\ 7,5 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} -0,12 \\ 0,175 \\ 0 \end{pmatrix}, s \in \mathbb{R}$

Aufstellen der Geraden h für das zweite
Flugzeug: h: $\vec{p} = \begin{pmatrix} 22 \\ 15,5 \\ 7,3 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 0,1 \\ -0,05 \\ 0,001 \end{pmatrix}, r \in \mathbb{R}$

Löse $\begin{pmatrix} 8,5 \\ -28 \\ 7,5 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} -0,12 \\ 0,175 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 22 \\ 15,5 \\ 7,3 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 0,1 \\ -0,05 \\ 0,001 \end{pmatrix}$ nach r, s auf:

Schreibe als Gleichungssystem:

$$\text{I} \quad 8,5 - 0,12s = 22 + 0,01r$$

$$\text{II} \quad 22 + 0,175s = 15,5 - 0,05r$$

$$\text{III} \quad 7,5 = 7,3 + 0,001r$$

Löse III nach r auf:

$$7,5 = 7,3 + 0,001r \quad /-7,3$$

$$0,2 = 0,001r \quad /:0,001$$

$$\mathbf{200 = r}$$

Setze $r=200$ in II ein:

$$22 + 0,175s = 15,5 - 0,05 \cdot 200$$

$$22 + 0,175s = 5,5 \quad /-22$$

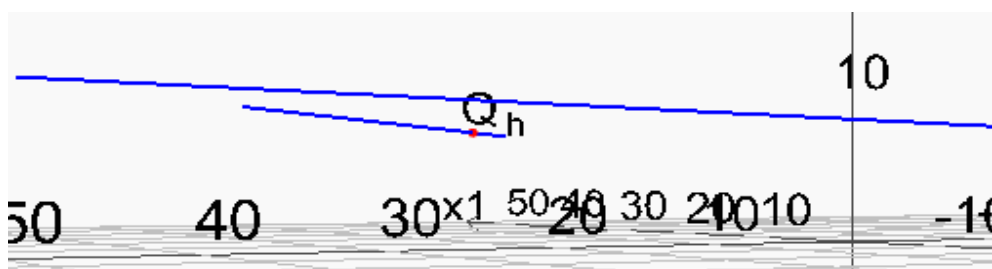
$$0,175s = -16,5 \quad /:0,175$$

$$\mathbf{s = -22}$$

Setze $r=200$ und $s=-22$ in I ein:

$$8,5 - 0,12 \cdot (-22) = 22 + 0,01 \cdot (200)$$

$$11,14 = 24 \quad \mathbf{WIDERSPRUCH}$$



Geschwindigkeit ist definiert als Bruch:

Weg

Zeit

Wir berechnen daher den Weg, den das Flugzeug in einer bestimmten Zeiteinheit zurücklegt. Dafür wählen wir den Richtungsvektor, denn er hat einen Anfang und ein Ende:

Die Länge des Richtungsvektors $\vec{v} = \begin{pmatrix} -0,12 \\ 0,175 \\ 0 \end{pmatrix}$ (Betrag)

berechnen:

$$|\vec{v}| = \sqrt{((-0,12)^2 + (0,175)^2 + (0)^2)} = \sqrt{(0,0144 + 0,030625)} = \sqrt{(0,045025)} \approx 0,21$$

Für das Durchfliegen des Richtungsvektors benötigt das Flugzeug eine Sekunde. Das ergibt

Weg 0,21 km

Zeit 1 sek = 0,21 km/sek

Das können wir umrechnen:

0,21 km/sek /*60

12,6 km/min /*60

756 km/h

Das Flugzeug fliegt mit einer Geschwindigkeit von 756 km pro Stunde.