Freie Universität Berlin
Institut für Mathematik
WiSe24/25
Stand: 23. Dezember 2024

A. Constantinescu
O. Parczyk
V. Hiebeler
D. Schlaugies

Mathematik Entdecken 1 – Hausaufgabe 10

Abgabe via Whiteboard als `Nachname_ME1_h10.pdf` bis **20:00 am Freitag**, den 10. Januar 2025.

Die Antworten sind stets zu begründen, inklusive der Beispiele.

N I C H T   U M B L Ä T T E R N   O H N E   D I E   A N W E I S U N G   Z U   L E S E N

A N W E I S U N G

Diese Hausaufgabe hat die Form einer Probeklausur. Das heißt, dass die Aufgabenstellung und die Punkteverteilung ähnlich einer Klausur sind. Die Klausur wird aber aus drei Aufgaben bestehen, nicht aus einer einzigen wie die Probeklausur.

Der Inhalt und der Schwierigkeitsgrad kann unterschiedlich zu der Klausur sein.

Um den Umständen der Klausur näher zu kommen, wird empfohlen die Aufgaben alleine, ohne Hilfsmittel, und innerhalb von 35 (maximal 45) Minuten zu bearbeiten.

Damit kein Nachteil für die aktive Teilnahme an der Veranstaltung durch Erhöhung der gesamten Punktzahl entsteht, werden auch für diese Hausaufgabe höchstens 4 Punkte eingetragen. Sie können aber für die vorliegende Aufgabe n Punkte verdienen, mit $0 \leqslant n \leqslant 20$. Es wird dann $\min\{n, 4\}$ für die Hausaufgabe eingetragen. Das sollte Sie auch ermutigen die Hausaufgabe in Klausur-ähnlichen Bedingungen zu bearbeiten.

Sie werden auch gebeten Ihre Vorbereitung und Ihre Leistung selber zu schätzen, indem Sie vor und nach dem Bearbeiten der Probeklausur eine erwartete Punktzahl angeben.

Das Thema der Probeklausur sind Mengen und Elementare Zahlentheorie.

Auf Seite 2 finden Sie die Zusatzaufgaben. Die Aufgaben der Probeklausur finden Sie ab Seite 4.

N I C H T   U M B L Ä T T E R N   O H N E   D I E   A N W E I S U N G   Z U   L E S E N

Zusatzaufgaben

Diese Aufgaben werden weder bewertet noch müssen sie abgegeben werden.
Sie werden in den Tutorien besprochen und sind für die Klausurvorbereitung sehr empfohlen.

Zusatzaufgabe 1.

Eine Relation $\sim$ auf einer Menge M heißt **euklidisch**, wenn

$$\forall\, x, y, z \in M \text{ gilt: } (x \sim z \,\text{und}\, y \sim z) \Rightarrow x \sim y.$$

Man zeige, dass $\sim$ genau dann eine Äquivalenzrelation auf M ist, wenn $\sim$ reflexiv und euklidisch ist.

Zusatzaufgabe 2.

Sei $\sim$ eine Relation auf der Menge $M \neq \emptyset$. Man finde den Fehler in dem „falschen Beweis" der folgenden Aussage:

Aussage: Wenn $\sim$ symmetrisch und transitiv ist, dann ist $\sim$ auch reflexiv.

„Beweis": *Sei $a \in M$ und sei $b \in M$, sodass $a \sim b$. Dann folgt aus der Symmetrie auch $b \sim a$. Aus der Transitivität folgt mit $a \sim b \,\text{und}\, b \sim a$, dass $a \sim a$. Also ist $\sim$ reflexiv.*

Zusatzaufgabe 3.

Sei $M = \{1, \ldots, n\}$. Wie viele verschiedene Äquivalenzrelationen mit genau zwei Äquivalenzklassen gibt es auf M?

Zusatzaufgabe 4.

Zeigen Sie das eine Ordnungsrelation total ist $\Leftrightarrow$Jede nicht-leere endliche Teilmenge ein minimales Element hat.

Zusatzaufgabe 5.

Sei $\preceq_{\text{Lex}}$ die Relation auf $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ definiert durch:

$$(a, b) \preceq_{\text{Lex}} (c, d) \Leftrightarrow \begin{cases} a < c \\ \quad \text{oder} \\ a = c \,\text{und}\, b \leq d \end{cases}.$$

Man beweise, dass

1. $\preceq_{\text{Lex}}$ eine Ordnungsrelation[¶] auf $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ ist.
2. $\preceq_{\text{Lex}}$ eine Wohlordnung ist. Das heißt, dass jede nicht leere Teilmenge N von $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ ein Element η_0 besitzt mit der Eigenschaft:

$$\eta_0 \preceq_{\text{Lex}} \alpha \quad \forall\, \alpha \in N.$$

[¶] Diese Ordnungsrelation heißt die **lexikografische Ordnung** auf $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$.

H I E R B E G I N N T D E R P F L I C H T T E I L D E R H A U S A U F G A B E

Stehen Sie also allein, ohne Hilfsmittel, konzentriert vor einem leeren Lösungsheft? Dann können Sie umblättern.

Probeklausur zu Mathematik Entdecken 1

20.Dezember 2024

Zeit: ~~90~~ 30 Minuten **Höchstpunktzahl:** ~~60~~ 20 Punkte **100%:** ~~48~~ 16† Punkte

Name:
Matrikelnummer:

Aufgabe	1	2	3	gesamt	Note
Punkte		X	X		X

Das Punkte-Noten Schema ist wie in der Klausur.

P	$<$ **24**	24...	27...	30...	33...	36...	39...	42...	44...	46...	**48** $\leq$
N	**5.0**	4.0	3.7	3.3	3.0	2.7	2.3	2.0	1.7	1.3	**1.0**

Hinweise

(a) Hilfsmittel sind nicht zugelassen. Insbesondere sind **elektronische Hilfsmittel** (zum Beispiel Suchmaschienen, Foren, Matlab, Twitter, Whatsapp, Signal), Mitschriften, Bücher, das non-Skript und die Hilfe anderer Personen **untersagt**.

(b) Es gibt ~~drei~~ 1 Aufgabe~~n~~ und pro Aufgabe gibt es 20 Punkte.

(c) Die Antworten sind stets zu begründen, inklusive der Beispiele.

(d) Sätze aus der Vorlesung können verwendet werden, aber die Aussage muss deutlich erklärt sein.

(e) Erhoffte Punktzahl ohne die Aufgabenstellung zu sehen $\boxed{}$

(f) Geschätzte Punktzahl nach dem Bearbeiten der Probeklausur $\boxed{}$‡

Prüfer: Alexandru Constantinescu
Olaf Parczyk

Wintersemester 2024/25
VL:192-337-01

†Die 16 Punkte entsprechen einer 1.0 in dieser Simulation. Für die Hausaufgabe werden höchstens 4 Punkte eingetragen

‡Wenn Sie dieses Blatt nicht drucken können, geben Sie bitte die erhoffte und geschätzte Punktzahl auf dem Antwortblatt an.

Freie Universität Berlin WiSe24/25
Institut für Mathematik **Prüfer:** A. Constantinescu, O. Parczyk

Mathematik Entdecken 1 - Probelklausur

20.12.2024

Aufgabenstellung

Zeit: ~~90~~ 30 Minuten **Maximale Punktzahl:** ~~60~~ 20 Punkte Punkte **100%:** ~~48~~ 16

Aufgabe 1 **20 Punkte**

a. (2P) Man gebe die Definition von surjektiven Abbildungen an.

b. (5P) Man finde eine Abbildung von $\mathbb{N}$ nach $\mathbb{N}$, die surjektiv aber nicht bijektiv ist. Man bestimme dann eine Links- **oder** eine Rechtsinverse davon.

c. (3 P) Es sei $\alpha : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{N}$ die Abbildung gegeben durch $\alpha(z) = z^4$. Man bestimme das Urbild der Menge $B = \{n \in \mathbb{N} \ : \ n \geqslant 100\}$ unter α.

d. (4P) Man zeige oder man widerlege:

Wenn $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ und $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ zwei surjektive Abbildungen sind, dann ist $h : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ gegeben durch $h(x) = f(x) \cdot g(x)$ auch surjektiv.

e. (6P) Man zeige, dass für alle bijektiven Abbildungen $\varphi : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}$ und $\psi : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}$, die Abbildung $\pi : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}$ gegeben durch $\pi(z) = \varphi(z) \cdot \psi(z)$ nicht bijektiv ist.