
Mathematik Entdecken 1 – Hausaufgabe 9

Abgabe via Whiteboard als Nachname_ME1_h9.pdf bis **20:00 am Freitag**, den 20. Dezember 2024.

Die Antworten sind stets zu begründen, inklusiv Beispiele.

Aufgabe 1.

2 points

Sei $a = \overline{a_m \dots a_1 a_0} \in \mathbb{N}$, mit $a_i \in \{0, \dots, 9\}$, eine im dekadischen System dargestellte natürliche Zahl. Die Quersumme, beziehungsweise die alternierende Quersumme von a ist:

$$Q(a) = \sum_{i=0}^m a_i \quad \text{beziehungsweise} \quad AQ(a) = \sum_{i=0}^m (-1)^i a_i.$$

1. Man zeige, dass $9 \mid a \iff 9 \mid Q(A)$.
2. Man zeige, dass $11 \mid n \iff 11 \mid AQ(n)$.

Übung 2.

2 Punkte

Sei $A = \{1, 2, \dots, 6\} \times \{1, 2, \dots, 6\}$ die Menge aller Ergebnisse beim Werfen von einem roten und einem grünen Würfel (rot ist die erste Zahl und grün ist die zweite Zahl). Auf A seien drei Relationen definiert. Man zeige jeweils, dass es sich um eine Äquivalenzrelation handelt und bestimme die Äquivalenzklassen:

1. $(a, b) \sim_1 (c, d) \iff |a - b| = |c - d|$
2. $(a, b) \sim_2 (c, d) \iff (a + b) \equiv (c + d) \pmod{7}$
3. $(a, b) \sim_3 (c, d) \iff a \cdot b = c \cdot d$

Total: 4 Punkte

Zusatzaufgaben auf der Rückseite

Zusatzaufgaben

Diese Aufgaben werden weder bewertet noch müssen sie abgegeben werden.
Sie werden in den Tutorien besprochen und sind für die Klausurvorbereitung sehr empfohlen.

Zusatzaufgabe 3.

Man bestimme für jedes $n \in \{5, 6, 11, 12\}$ die Menge

$$\{(x, y) \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} : 2x - 3y + 1 = 0\},$$

wobei die Addition und die Multiplikation modulo n durchgeführt werden. Was kann man allgemein sagen, wenn n eine Primzahl ist?

Zusatzaufgabe 4.

Man zeige, dass es unendlich viele $n \in \mathbb{N}$ gibt, sodass $n \mid 2^n + 1$.

Zusatzaufgabe 5.

Man zeige, dass wenn $p > 3$ eine Primzahl ist, dann gilt $p \equiv \pm 1 \pmod{6}$.

Zusatzaufgabe 6.

Welche der folgenden Zahlen ist durch 101 teilbar?

1. $100^2 - 1$.
2. $99^{100} + 1$.
3. $2^{100} - 1$.
4. $49^{198} - 52^{198}$.

Zusatzaufgabe 7.

Wie Sie wissen sind Äquivalenzrelationen reflexiv, symmetrisch und transitiv. Damit diese Definition sinnvoll ist, sollten Sie Beispiele für Relationen angeben können, die

1. reflexiv und symmetrisch aber nicht transitiv;
2. reflexiv und transitiv aber nicht symmetrisch;
3. symmetrisch und transitiv aber nicht reflexiv sind.

Zusatzaufgabe 8.

M sei die Menge $\{a, b, c, d, e, f\}$. Ergänzen Sie

1. die Menge $\{(e, e), (f, d), (c, a), (b, f)\}$ zu einer Äquivalenzrelation auf M mit mindestens zwei Äquivalenzklassen,
2. die Menge $\{(a, a), (f, e), (c, d), (a, b), (c, a), (e, b), (f, d)\}$ zu einer totalen Ordnung auf M .

Zusatzaufgabe*** 9.

Was ist die Quersumme der Quersumme der Quersumme von 4444^{4444} ? *

*Hinweis: Rechnen Sie Modulo 9, und geben Sie auch eine obere Schranke für $Q(Q(Q(4444^{4444})))$ an