Freie Universität Berlin
Institut für Mathematik
WiSe24/25
Stand: 6. Dezember 2024

A. Constantinescu
O. Parczyk
V. Hiebeler
D. Schlaugies

Mathematik Entdecken 1 – Hausaufgabe 8

Abgabe via Whiteboard als `Nachname_ME1_h8.pdf` bis **20:00 am Freitag**, den 13. Dezember 2024.

Die Antworten sind stets zu begründen, inklusiv Beispiele.

Aufgabe 1. **4 Punkte**

Für jedes $n \in \mathbb{N}$ sei $F_n = 2^{2^n} + 1$ die n-te Fermat Zahl.

1. Man zeige*, dass $F_{n+1} = (F_n - 1)^2 + 1$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt.

2. Man zeige†, dass $\prod_{k=0}^{n} F_k = F_{n+1} - 2$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt.

3. Man zeige‡, dass für alle $i \neq j$ gilt $\mathrm{ggT}(F_i, F_j) = 1$.

4. Man verwende Punkt 3 und den *Hauptsatz der elementaren Zahlentheorie*, um die Unendlichkeit der Menge aller Primzahlen zu beweisen.

Total: 4 Punkte

`Zusatzaufgaben auf der Rückseite`

*Hinweis: Direkter Beweis.
†Hinweis: Induktion und Punkt 1.
‡Hinweis: Punkt 2 und Teilbarkeit.

Zusatzaufgaben

Diese Aufgaben werden weder bewertet noch müssen sie abgegeben werden.
Sie werden in den Tutorien besprochen und sind für die Klausurvorbereitung sehr empfohlen.

Zusatzaufgabe 2.

Man bestimme alle $a, b, c, d, n \in \mathbb{N}$, sodass

$$2^a \cdot 3^b \cdot 5^{2+c} \cdot 7^d = n!.$$

Zusatzaufgabe 3.

Man zeige oder man widerlege:

Wenn $p_1, \ldots, p_n$ die ersten n Primzahlen sind, dann ist $p_1 \cdot \cdots \cdot p_n + 1$ auch prim.

Zusatzaufgabe 4.

Man zeige, dass für alle $n \in \mathbb{N}$ die Zahl $n^2 + n + 1$ nicht durch 5 teilbar ist.

Zusatzaufgabe 5.

Man zeige, dass für alle $x \in \mathbb{Z}$ die Zahl $x^3 - 6x^2 + 11x - 6$ durch 3 teilbar ist.

Zusatzaufgabe 6.

Sei $a = \overline{a_r \ldots a_0} \in \mathbb{N}$ eine natürliche Zahl die mit den Ziffern $a_r, \ldots, a_0$ in dem Dezimalsystem dargestellt ist. Sei $k \in \mathbb{N}_{>0}$. Man zeige, dass a genau dann durch 5^k teilbar ist, wenn $\overline{a_{k-1} \cdots a_0}$ durch 5^k teilbar ist.

Zusatzaufgabe 7.

Es sei p eine Primzahl und $k \in \mathbb{N}_{>0}$. Man zeige, dass

$$a^2 \equiv a \bmod p^k \iff a \equiv 0 \bmod p^k \ \text{ oder } a \equiv 1 \bmod p^k.$$

Hinweis: Man versuche den Fall $k = 1$ zu erst.

Zusatzaufgabe 8.

Man zeige, dass $1 + 2^2 + 3^{3^3}$ nicht das Quadrat einer natürlichen Zahl ist.
(**Hinweis:** $3^{3^3} = 3^{(3^3)} = 3^{27}$.)

(Erste Phase der Mathe Olympiade, 5.Klasse, Bukarest 1998)