
Mathematik Entdecken 1 – Hausaufgabe 7

Abgabe via Whiteboard als Nachname_ME1_h7.pdf bis **20:00 am Freitag**, den 6. Dezember 2024.

Die Antworten sind stets zu begründen, inklusiv Beispiele.

Aufgabe 1.

2 Punkte

1. Man zeige, dass für alle $n \in \mathbb{N}$ die Zahlen $5n + 3$ und $8n + 5$ teilerfremd sind.
2. Es seien $a, b \in \mathbb{N}_{>2}$ zwei unterschiedliche Primzahlen. Man bestimme $\text{ggT}(a + b, a - b)$.

Aufgabe 2.

2 Punkte

Es seien $a, b, c \in \mathbb{Z}$. Man zeige, dass die Gleichung $ax + by = c$ genau dann mindestens eine Lösung $(x, y) \in \mathbb{Z}^2$ hat, wenn $\text{ggT}(a, b) \mid c$.

Total: 4 Punkte

Zusatzaufgaben auf der Rückseite

Zusatzaufgaben

Diese Aufgaben werden weder bewertet noch müssen sie abgegeben werden.
Sie werden in den Tutorien besprochen und sind für die Klausurvorbereitung sehr empfohlen.

Zusatzaufgabe 3.

Man bestimme mit Hilfe des euklidischen Algorithmus den ggT, das kgV und $\lambda, \mu \in \mathbb{Z}$, sodass $\lambda \cdot a + \mu \cdot b = \text{ggT}(a, b)$ für folgende Paare:

(a) $a = 1971, b = 63$.

(d) $a = -72, b = -88$.

(b) $a = 322, b = 285$.

(e) $a = 2860, b = 720$.

(c) $a = 55, b = -10$.

(f) $a = 4410, b = 3675$.

Zusatzaufgabe 4.

Man zeige, dass für $a \in \mathbb{N}$ folgende Äquivalenz gilt:

$$\text{ggT}(a, a+3) \neq 1 \text{ und } \text{ggT}(a+1, a+5) \neq 1 \iff 3 \mid a \text{ und } a \text{ ist ungerade.}$$

Zusatzaufgabe 5.

Seien $a, b \in \mathbb{Z}$. Man zeige, dass $\text{ggT}(5a+17b, 2a+7b) = \text{ggT}(a, b)$.

Zusatzaufgabe 6.

Es seien $m, n \in \mathbb{N}$. Man zeige, dass das Produkt $m!n!$ ein Teiler von $(m+n)!$ ist.

Zusatzaufgabe 7.

Man zeige, dass $7 \mid a^2 + b^2 \iff 7 \mid a$ und $7 \mid b$.

Zusatzaufgabe 8.

Es sei $n \in \mathbb{N}_{>0}$ und $A \subseteq \{1, 2, \dots, 2n\}$ mit $\#A = n+1$.

1. Man zeige, dass es zwei teilerfremde Zahlen in A gibt.
2. Man zeige, dass es $a, b \in A$ mit $a \mid b$ gibt.