Freie Universität Berlin
Institut für Mathematik
WiSe24/25
Stand: 22. November 2024

A. Constantinescu
O. Parczyk
V. Hiebeler
D. Schlaugies

Mathematik Entdecken 1 – Hausaufgabe 6

Abgabe via Whiteboard als `Nachname_ME1_h6.pdf` bis **20:00 am Freitag**, den 29. November 2024.

Die Antworten sind stets zu begründen, inklusiv Beispiele.

Aufgabe 1. **2 Punkte**

Es seien $a, b \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Man zeige, dass

$$a < \frac{1}{a} < b < \frac{1}{b} \Rightarrow a < -1.$$

Aufgabe 2. **2 Punkte**

Man beweise folgende Aussagen durch Induktion.

1. Für alle $n \in \mathbb{N}$ ist $11^{n+2} + 12^{2n+1}$ durch 133 teilbar.
2. Für alle $n \in \mathbb{N}$ ist $4^n + 15n - 1$ durch 9 teilbar.

Total: 4 Punkte

`Zusatzaufgaben auf der Rückseite`

Zusatzaufgaben

Diese Aufgaben werden weder bewertet noch müssen sie abgegeben werden.
Sie werden in den Tutorien besprochen und sind für die Klausurvorbereitung sehr empfohlen.

Zusatzaufgabe 3.

Man gebe drei verschiedene Beweise (direkt, durch Fallunterschied, durch Induktion) folgender Aussage an:

$$n^2 + 3n + 7 \text{ ist ungerade } \forall\, n \in \mathbb{N}.$$

Zusatzaufgabe 4.

Man zeige, dass $3^{2n} - 1$ durch 8 teilbar ist, für alle $n \in \mathbb{N}$.

Zusatzaufgabe 5.

Es seien $x, y \in \mathbb{R}$. Man zeige, dass wenn $x + y \notin \mathbb{Q}$, dann gilt $x \notin \mathbb{Q}$ oder $y \notin \mathbb{Q}$.

Zusatzaufgabe 6.

Für jedes $k \in \mathbb{N}$ bezeichne $k! = \prod_{i=1}^{k} i$, wobei das leere Produkt gleich mit 1 ist.

1. Man finde alle $n \in \mathbb{N}$, sodass $\dfrac{(n+1)!}{(n-1)!} = 30$.
2. Man finde alle $n \in \mathbb{N}$, sodass $\dfrac{(2n)!}{(2n-3)!} = \dfrac{20 \cdot n!}{(n-2)!}$.

Zusatzaufgabe 7.

Man zeige durch einfache Induktion, dass für alle natürliche Zahlen $n \in \mathbb{N}_{>0}$ und für alle reelle Zahlen $a_1, \ldots, a_n, b_1, \ldots, b_n \in \mathbb{R}$ gilt

$$\left(\sum_{i=1}^{n} a_i b_i \right)^2 \leqslant \left(\sum_{i=1}^{n} a_i^2 \right) \left(\sum_{i=1}^{n} b_i^2 \right).$$

(Diese Ungleichung ist als “Cauchy-Ungleichung” bekannt. Sie ist ein Sonderfall der Chaucy-Bunyakowsky-Schwarz Ungleichung und hat viele Anwendungen von der linearen Algebra bis zur Quantenphysik.)