Freie Universität Berlin
Institut für Mathematik
WiSe24/25
Stand: 14. Dezember 2024

A. Constantinescu
O. Parczyk
V. Hiebeler
D. Schlaugies

Mathematik Entdecken 1 – Hausaufgabe 7

L Ö S U N G E N

Aufgabe 1. **2 Punkte**

1. Man zeige, dass für alle $n \in \mathbb{N}$ die Zahlen $5n+3$ und $8n+5$ teilerfremd sind.
2. Es seien $a, b \in \mathbb{N}_{>2}$ zwei unterschiedliche Primzahlen. Man bestimme $\mathrm{ggT}(a+b, a-b)$.

Lösung zu Übung 1.

1. *Sei $n \in \mathbb{N}$ beliebig. Wir verwenden die Umkehrung des Lemma von Bézout für ggT=1: Wenn es $\lambda, \mu \in \mathbb{Z}$ gibt, sodass $\lambda(5n+3) + \mu(8n+5) = 1$, dann sind $5n+3$ und $8n+5$ teilerfremd.*

   *(**Strategie-Erklärung:** Damit das für alle n gilt, versuchen sollte das Ziel sein $\lambda(5n)+\mu(8n) = 0$, also dass $5\lambda + 8\mu = 0$. Das wird von $\lambda = -8$ und $\mu = 5$ erfüllt.).*

   Wir haben
   $$-8(5n+3) + 5(8n+5) = -40n - 24 + 40n + 25 = 1,$$
   also $\mathrm{ggT}(5n+3, 8n+5) = 1$.
2. *Sei $d = \mathrm{ggT}(a+b, a-b)$. Es folgt also, dass*
   $$\begin{aligned} d &\mid (a+b)+(a-b) = 2a \quad \text{und} \\ d &\mid (a+b)-(a-b) = 2b. \end{aligned}$$
   Weil $a, b > 2$ und prim sind, sind beide ungerade. Also $a+b$ und $a-b$ sind gerade und somit ist 2 ein gemeinsamer Teiler. Also aus (ggT2) folgt $2 \mid d$. Also $d = 2d'$. Dann folgt aus $2d' \mid 2a$ und $2d' \mid 2b$, dass $d' \mid a$ und $d' \mid b$. Das impliziert, dass $d' \mid \mathrm{ggT}(a,b) = 1$, also $d' = 1$. (Der ggT von a und b ist 1, weil a und b verschiedene Primzahlen sind.) Also
   $$\mathrm{ggT}(a+b, a-b) = 2.$$

Aufgabe 2. **2 Punkte**

Es seien $a, b, c \in \mathbb{Z}$. Man zeige, dass die Gleichung $ax + by = c$ genau dann mindestens eine Lösung $(x, y) \in \mathbb{Z}^2$ hat, wenn $\mathrm{ggT}(a,b) \mid c$.

Lösung zu Übung 2.

Sei $d = \mathrm{ggT}(a, b)$.

$\boxed{\Rightarrow}$ *Sei $x, y \in \mathbb{Z}$ eine Lösung der Gleichung. Weil $d \mid a$ und $d \mid b$, folgt es, dass $d \mid ax + by = c$.*

$\boxed{\Leftarrow}$ *Sei $d = \mathrm{ggT}(a, b)$. Aus dem Lemma von Bézout existieren $\lambda, \mu \in \mathbb{Z}$, sodass $\lambda a + \mu b = d$. Weil $d \mid c$, existiert ein $k \in \mathbb{Z}$, sodass $c = dk$. Es gilt dann für $x = k\lambda$ und $y = k\mu$, dass*

$$ax + by = ak\lambda + bk\mu = k(a\lambda + b\mu) = kd = c.$$

Zusatzaufgabe 3.

Es sei $n \in \mathbb{N}_{>0}$ und $A \subseteq \{1, 2, \dots, 2n\}$ mit $\sharp A = n + 1$.

1. Man zeige, dass es zwei teilerfremde Zahlen in A gibt.
2. Man zeige, dass es $a, b \in A$ mit $a \mid b$ gibt.

Lösung zu Übung 3.

1. *Weil es $n+1$ Zahlen zwischen 1 und $2n$ sind, muss es auch mindestens zwei geben mit Abstand 1. Also a und $a + 1$. Dann ist $\mathrm{ggT}(a, a + 1) = 1$.*
2. *Sei $A = \{a_1, \dots, a_{n+1}\}$. Wir schreiben jedes $a_i \in A$ als*

   $$a_i = 2^{k_i} \cdot m_i$$

   mit m_i ungerade. Wir haben also $\{m_1, \dots, m_{n+1}\} \subseteq \{2k - 1 \;:\; k = 1, \dots, n\}$. Weil die Menge auf der rechten Seite n Elementen hat, folgt aus dem Schubfach-Prinzip, dass es i, j mit $m_i = m_j$ gibt. Also, wenn $k_i < k_j$, dann $a_i \mid a_j$, und sonst $a_j \mid a_i$.