Freie Universität Berlin
Institut für Mathematik
WiSe24/25
Stand: 14. Dezember 2024

A. Constantinescu
O. Parczyk
V. Hiebeler
D. Schlaugies

Mathematik Entdecken 1 – Hausaufgabe 6

L Ö S U N G E N

Aufgabe 1. **2 Punkte**

Es seien $a, b \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Man zeige, dass

$$a < \frac{1}{a} < b < \frac{1}{b} \Rightarrow a < -1.$$

Lösung zu Übung 1.

Bemerkung 1: *Aus $a < 1/a$ folgt $0 < a < 1$ oder $a < -1$.*
Bemerkung 2: *Aus $b < 1/b$ folgt $0 < b < 1$ oder $b < -1$. Also in jedem Fall $b < 1$.*

Wir verwenden einen Widerspruchsbeweis. Nehmen wir also an, dass $a \nless -1$. Das heißt $a \geqslant -1$, also, nach Bemerkung 1, dass $0 < a < 1$. Es folgt somit $1 < \frac{1}{a}$. Aus der Voraussetzung haben wir $\frac{1}{a} < b$, also $b > 1$ - ein Widerspruch zu $b < 1$.

Aufgabe 2. **2 Punkte**

Man beweise folgende Aussagen durch Induktion.

1. Für alle $n \in \mathbb{N}$ ist $11^{n+2} + 12^{2n+1}$ durch 133 teilbar.
2. Für alle $n \in \mathbb{N}$ ist $4^n + 15n - 1$ durch 9 teilbar.

Lösung zu Übung 2.

1. $\boxed{\textit{I.A. } n = 0}$ *Wir setzen $n = 0$ ein und haben: $11^2 + 12 = 121 + 12 = 133 \cdot 1$.*

   $\boxed{\textit{I.S. } k \Rightarrow k+1}$ *Sei $k \geqslant 0$, sodass $11^{k+2} + 12^{2k+1} = 133 \cdot c$ mit $c \in \mathbb{Z}$. Es gilt:*

$$\begin{aligned}
11^{(k+1)+2} + 12^{2(k+1)+1} &= 11 \cdot 11^{k+1} + 12^2 \cdot 12^{2k+1} \\
&= (12^2 - 12^2 + 11) \cdot 11^{k+1} + 12^2 \cdot 12^{2k+1} \\
&= 12^2 \cdot (11^{k+1} + 12^{2k+1}) - (12^2 - 11) \cdot 11^{k+1} \\
&= 12^2 \cdot (133 \cdot c) - (133) \cdot 11^{k+1} \qquad \textit{(aus der I.V.)} \\
&= 133 \cdot (12^2 \cdot c - 11^{k+1}).
\end{aligned}$$

   Also 133 teilt $11^{(k+1)+2} + 12^{2(k+1)+1}$, somit folgt die Aussage auch für $k + 1$.

2. $\boxed{\text{I.A. } n = 0}$ *Wir setzen* $n = 0$ *ein und haben* $4^0 + 15 \cdot 0 - 1 = 0 = 9 \cdot 0$.

$\boxed{k \Rightarrow k+1}$ *Sei* $k \geqslant 0$, *sodass* $4^k + 15k - 1 = 9 \cdot c$ *mit* $c \in \mathbb{Z}$. *Es gilt:*

$$\begin{aligned} 4^{k+1} + 15(k+1) - 1 &= 4 \cdot 4^k + 15k + 15 - 1 \\ &= 4 \cdot 4^k + 4 \cdot 15k - 3 \cdot 15k - 4 + 4 + 14 \\ &= 4 \cdot (4^k + \cdot 15k - 1) - 3 \cdot 15k + 18 \\ &= 4 \cdot (9c) - 9 \cdot 5k + 9 \cdot 2 \\ &= 9 \cdot (4c - 5k + 2) \end{aligned}$$

Also 9 teilt $4^{k+1} + 15(k+1) - 1$, *somit folgt die Aussage für* $k+1$.

Zusatzaufgabe 3.

Man gebe drei verschiedene Beweise (direkt, durch Fallunterschied, durch Induktion) folgender Aussage an:

$$n^2 + 3n + 7 \text{ ist ungerade } \forall\, n \in \mathbb{N}.$$

Lösung zu Übung 3.

Fall unterschied:

$\boxed{\textit{Fall 1: n=gerade}}$ *Also* $\exists\, k \in \mathbb{N}$ *mit* $n = 2k$. *Wir haben dann*

$$n^2 + 3n + 7 = 4k^2 + 6k + 6 + 1 = 2(2k^2 + 3k + 3) + 1.$$

$\boxed{\textit{Fall 1: n=ungerade}}$ *Also* $\exists\, k \in \mathbb{N}$ *mit* $n = 2k + 1$. *Wir haben dann*

$$n^2 + 3n + 7 = 4k^2 + 4k + 1 + 6k + 3 + 7 = 2(2k^2 + 5k + 5) + 1.$$

Direkter Beweis:

$$n^2 + 3n + 7 = n(n+3) + 7$$

Weil $n(n+3)$ *immer gerade ist, dann ist* $n(n+3) + 7$ *immer ungerade.*

Vollständige Induktion:

$\boxed{n = 0}$ $0^2 + 3 \cdot 0 + 7 = 7$ *ist ungerade.*

$\boxed{k \Rightarrow k+1}$

$$(k+1)^2 + 3(k+1) + 7 = k^2 + 2k + 1 + 3k + 3 + 7 = (k^2 + 3k + 7) + 2(k+2).$$

Aus der I.V. ist es also ungerade + gerade, also ungerade.

Zusatzaufgabe 4.

Man zeige durch einfache Induktion, dass für alle natürliche Zahlen $n \in \mathbb{N}_{>0}$ und für alle reelle Zahlen $a_1, \ldots, a_n, b_1, \ldots, b_n \in \mathbb{R}$ gilt

$$\left(\sum_{i=1}^{n} a_i b_i \right)^2 \leqslant \left(\sum_{i=1}^{n} a_i^2 \right) \left(\sum_{i=1}^{n} b_i^2 \right).$$

(Diese Ungleichung ist als "Cauchy-Ungleichung" bekannt. Sie ist ein Sonderfall der Chaucy-Bunyakowsky-Schwarz Ungleichung und hat viele Anwendungen von der linearen Algebra bis zur Quantenphysik.)

Lösung zu Übung 7.

Wir zeigen den Beweis durch einfache Induktion.

$\boxed{n=1}$ *In diesem Fall haben wir sogar Gleichheit:* $(a_1 b_1)^2 = a_1^2 b_1^2$*, für alle* $a_1, b_1 \in \mathbb{R}$.

$\boxed{n \Rightarrow n+1}$ *Wir haben*

$$\begin{aligned}
\left(\sum_{i=1}^{n+1} a_i b_i\right)^2 &= \left(\left(\sum_{i=1}^{n} a_i b_i\right) + a_{n+1} b_{n+1}\right)^2 \\
&= \left(\sum_{i=1}^{n} a_i b_i\right)^2 + 2a_{n+1}b_{n+1}\left(\sum_{i=1}^{n} a_i b_i\right) + a_{n+1}^2 b_{n+1}^2 \\
&\leqslant \left(\sum_{i=1}^{n} a_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n} b_i^2\right) + \sum_{i=1}^{n} 2(a_{n+1}b_i)(a_i b_{n+1}) + a_{n+1}^2 b_{n+1}^2 && \textit{Induktive Voraussetzung} \\
&\leqslant \left(\sum_{i=1}^{n} a_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n} b_i^2\right) + \sum_{i=1}^{n} \left((a_{n+1}b_i)^2 + (a_i b_{n+1})^2\right) + a_{n+1}^2 b_{n+1}^2 && \textit{weil } 2xy \leqslant x^2 + y^2 \\
&= \left(\sum_{i=1}^{n} a_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n} b_i^2\right) + a_{n+1}^2 \sum_{i=1}^{n} b_i^2 + b_{n+1}^2 \sum_{i=1}^{n} a_i^2 + a_{n+1}^2 b_{n+1}^2 \\
&= \left(\sum_{i=1}^{n+1} a_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n+1} b_i^2\right)
\end{aligned}$$