Freie Universität Berlin
Institut für Mathematik
WiSe24/25
Stand: 13. Dezember 2024

A. Constantinescu
O. Parczyk
V. Hiebeler
D. Schlaugies

Mathematik Entdecken 1 – Hausaufgabe 5

L Ö S U N G E N

Aufgabe 1. **2 Punkte**

Geben Sie jeweils zwei verschiedene Beweise folgender Sätze.

1. Es seien $x, y \in \mathbb{R}$. Wenn $x^2 + y = 13$ und $y \neq 4$, dann gilt $x \neq 3$.
2. Es seien A, B, C Mengen mit $A \setminus B \subseteq C$. Wenn $x \in A \setminus C$, dann $x \in B$.

Lösung zu Übung 1.

1. ***Direkter Beweis:*** *Es seien $x, y \in \mathbb{R}$ mit $x^2 + y = 13$ und $y \neq 4$. Die Aussage $y \neq 4$ ist äquivalent zu $13 - y \neq 13 - 4$. Also*

$$\left(x^2 + y = 13 \,und\, y \neq 4\right) \iff \left(x^2 = 13 - y \,und\, 13 - y \neq 9\right)$$

Es folgt also $x^2 \neq 9$ und daraus folgt $x \neq 3$.

Kontraposition: *Wir zeigen, dass $x = 3 \Rightarrow x^2 + y \neq 13$ oder $y = 4$.*
Wenn $x^2 + y \neq 13$, dann ist die Implikaiton wahr.
Wenn $x^2 + y \neq 13$, dann folgt aus $x = 3$, dass $y = 4$, also auch in diesem ist die Implikation wahr.

2. ***Widerspruchsbeweis:*** *Nehmen wir an, dass die Aussage falsch ist. Das heißt, dass die Negation der Implikation wahr ist:*

$$x \in A \setminus C \,und\, x \notin B.$$

Aus $x \in A \setminus C$ folgt $x \in A$. Zusammen mit $x \notin B$ heißt das, dass $x \in A \setminus B$. Aus der Voraussetzung $A \setminus B \subseteq C$ folgt $x \in C$. Aber aus $x \in A \setminus C$ folgt auch $x \notin C$. Wir haben also einen Widerspruch bekommen:

$$x \in C \,und\, x \notin C.$$

Unsere Annahme muss also falsch gewesen sein, also ist die Aussage wahr.

Kontraposition: *Wir zeigen, dass $x \notin B \Rightarrow x \notin A \setminus C$.*
Sei also $x \notin B$. Jetzt haben wir einen Fallunterschied: $x \in A$ oder $x \notin A$.
Fall 1: *$x \in A$. Weil $x \notin B$, gilt $x \in A \setminus B$. Weil $A \setminus B \subseteq C$, folgt also $x \in C$. Also $x \notin A \setminus C$.*
Fall 2: *$x \notin A$. Das bedeutet direkt, dass $x \notin A \setminus C$.*

Aufgabe 2. **2 Punkte**

Es seien $n \in \mathbb{N}$ und $\mathbb{N}_{<n} := \{a \in \mathbb{N} \mid a < n\}$. Wie viele Elementen hat die Potenzmenge $2^{\mathbb{N}_{<n}}$? Geben Sie einen Beweis durch vollständige Induktion für Ihre Antwort an.

Lösung zu Übung 2.

$\#\mathbb{N}_{<n} = n$. Durch ausprobieren für $n = 1, 2, 3, \ldots$ entdeckt man einen Muster: $\#2^{N_{<n}} = 2^n$. Dann beweist man, dass das für alle $n \in \mathbb{N}$ stimmt.

$\boxed{I.A.\ n = 0}$ *$N_{<0} = \emptyset$. Also $\#2^{\emptyset} = \#\{\emptyset\} = 1 = 2^0$.*
$\boxed{I.S.\ n-1 \Rightarrow n}$ *Die induktive Voraussetzung ist, dass $\#2^{\mathbb{N}_{<n-1}} = 2^{n-1}$. Wir schreiben zerlegen $2^{N_{<n}}$ als disjunkte Vereinigung:*

$$\begin{aligned} 2^{N_{<n}} &= \{A \subset \mathbb{N}_{<n} \mid n-1 \notin A\} \sqcup \{A \subseteq \mathbb{N}_{<n} \mid n-1 \in A\} \\ &= 2^{N_{<n-1}} \sqcup \left\{\{n-1\} \sqcup A \mid A \in 2^{N_{<n-1}}\right\} \end{aligned}$$

Wobei $M \sqcup N$ heißt $M \cup N$ und $M \cap N = \emptyset$. Wir haben also

$$\#2^{N_{<n}} = \#2^{N_{<n-1}} + \#2^{N_{<n-1}} = 2^{n-1} + 2^{n-1} = 2 \cdot 2^{n-1} = 2^n.$$

Zusatzaufgabe* 3.

Man bestimme alle Abbildungen $f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$, die folgende Bedingungen gleichzeitig erfüllen:

(a) $f(x+y) = f(x) + f(y) + 2xy, \quad \forall\, x, y \in \mathbb{N};$

(b) Für alle $n \in \mathbb{N}$ ist $f(n)$ eine Quadratzahl.

Lösung zu Übung 3.

Sei $f(1) = a^2$. Es folgt also $f(2) = 2a^2+2$, $f(3) = 3a^2+6$, $f(4) = 3a^2+6+a^2+6 = 4a^2+12 = 4(a^2+3)$. Durch vollständige Induktion zeigt man, dass

$$f(n) = n(a^2 + n - 1).$$

Weil $4(a^2+3)$ ein Quadrat ist, dann muss auch a^2+3 ein Quadrat sein. Weil a^2 und a^2+3 Quadrate sind, folgt es, dass $a^2 = 1$. Es folgt also, dass $f(n) = n(1+n-1) = n^2$.