Freie Universität Berlin
Institut für Mathematik
WiSe24/25
Stand: 13. Dezember 2024

A. Constantinescu
O. Parczyk
V. Hiebeler
D. Schlaugies

Mathematik Entdecken 1 – Hausaufgabe 4

L Ö S U N G E N

Aufgabe 1. **2 Punkte**

Man finde Beispiele und Nichtbeispiele[†] für folgende Definitionen.

1. Eine Abbildung $f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ heißt **zwei-zu-eins**, wenn die Faser über jedes Element im Wertebereich Kardinalität zwei hat.
2. Eine ganze Zahl x heißt **glückliche Zahl**, wenn durch Wiederholen des folgendes Prozesses die 1 erhalten wird:

   Addiere die Quadrate der Ziffern von x um so eine neue Zahl x' zu erhalten.

Lösung zu Übung 1.

1. *Beispiel: Die Abbildung $f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ gegeben durch $f(n) = \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$. Wir zeigen jetzt, dass alle Fasern genau zwei Elemente enthalten. Sei $m \in \mathbb{N}$ beliebig. Es gilt*

   $$f^{-1}(m) = \{n \in \mathbb{N} \ : \ \lfloor \tfrac{n}{2} \rfloor = m\} = \{2m, 2m+1\}.$$

   Die Inklusion "$\supseteq$" gilt, weil $\frac{2m}{2} = m$ und $\frac{2m+1}{2} = m + \frac{1}{2}$. In beiden Fällen ist m die größte ganze Zahl, die kleiner oder gleich ist.

   Die andere Inklusion ("$\subseteq$") gilt, weil wenn $a < 2m$, dann ist $\frac{a}{2} < m$ und wenn $a > 2m+1$, dann ist $\frac{a}{2} \geqslant m + 1 > m$.

   Nichtbeispiel: Die identische Abbildung $\mathrm{id}_{\mathbb{N}} : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ ist nicht zwei-zu-eins, weil $\mathrm{id}_{\mathbb{N}}^{-1}(1) = \{1\}$ nicht Kardinalität zwei hat.
2. 10^n *ist glücklich für alle $n \in \mathbb{N}$. Auch 5555 ist glücklich weil*

   $$5555 \mapsto 25 + 25 + 25 + 25 = 100 \mapsto 1 + 0 + 0 = 1.$$

   Die Zahl 7 ist auch glücklich, weil

   $$7 \mapsto 49 \mapsto 16 + 81 = 97 \mapsto 81 + 49 = 130 \mapsto 1 + 9 + 0 = 10 \mapsto 1 + 0 = 1.$$

[†] Das heißt Beispiele die die Bedingungen einer gegebenen Definition **nicht** erfüllen. Diese sollten aber dieselbe Natur haben. Also ein Apfel oder $\sqrt{2}$ ist kein Nichtbeispiel von Primzahl. Ein Nichtbeispiel von Primzahl muss eine natürliche Zahl sein.

Die Zahl 85 *ist nicht glücklich weil*

$$85 \mapsto 64+25 = \mathbf{89} \mapsto 64+81 = 145 \mapsto 1+16+25 = 42 \mapsto 16+4 = 20$$
$$20 \mapsto 4+0 = 4 \mapsto 16 \mapsto 37 \mapsto 9+49 = 58 \mapsto 25+64 = \mathbf{89}.$$

Wir landen in einer Schleife die nicht die 1 enthält.

Aufgabe 2. **2 Punkte**

Es seien A, B, C Mengen. Man betrachte folgende Aussage:

Wenn $A \subseteq C$, $B \subseteq C$ und $x \in A$, dann gilt $x \in B$.

1. Man finde den Fehler im folgenden Beweis:

   Es sei $x \in A$. Wir nehmen an, dass $x \notin B$. Weil $x \in A$ und $A \subseteq C$, ist $x \in C$. Da $x \notin B$ und $B \subseteq C$, folgt $x \notin C$. Wir haben aber $x \in C$ und $x \notin C$; das ist ein Widerspruch. Also muss unsere Annahme $x \notin B$ falsch gewesen sein. Also $x \in B$.

2. Ist die Aussage wahr? (Man zeige oder man widerlege die Aussage.)

Lösung zu Übung 2.

1. *Es sei $x \in A$. - ist die Annahme die wir brauchen.*

   Wir nehmen an, dass $x \notin B$. - ein Widerspruchbeweis wird durchgeführt.

   Weil $x \in A$ und $A \subseteq C$, ist $x \in C$. - das stimmt per Definition von Mengeninklusion.

   Da $x \notin B$ und $B \subseteq C$, folgt $x \notin C$. - das ist falsch; hier ist ein Gegenbeispiel: $B = \{2\} \subseteq \{2,3\} = C$; es gilt $3 \notin B$ aber $3 \in C$.

   Wir haben aber $x \in C$ und $x \notin C$; das ist ein Widerspruch. - das stimmt (wenn der vorige Schritt richtig gewesen wäre).

   Also muss unsere Annahme $x \notin B$ falsch gewesen sein. Also $x \in B$. - das wäre auch richtig, angenommen kein Fehler wäre vorgetreten.

Zusatzaufgabe 3.

Man gebe jeweils ein Beispiel und ein Nichtbeispiel für folgende Definitionen:

1. Eine Abbildung $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ heißt **stark konvex**, wenn

$$f(tx + (1-t)y) < tf(x) + (1-t)f(y) \qquad \forall\, x \neq y \,\text{und}\, 0 < t < 1.$$

2. Eine Abbildung $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ heißt **stark konkav**, wenn

$$f(tx + (1-t)y) > tf(x) + (1-t)f(y) \qquad \forall\, x \neq y \,\text{und}\, 0 < t < 1.$$

3. Man gebe ein Beispiel einer Abbildung $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ die weder konvex noch konkav ist.
4. Man zeige oder man widerlege folgende Aussage:

$$\text{Wenn } f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \text{ konvex ist, dann gilt } f\left(\frac{x+y}{2}\right) < \frac{f(x)+f(y)}{2} \quad \forall\, x, y \in \mathbb{R}.$$

Lösung zu Übung 3.

1. *Beispiel: Die Abbildung $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ gegeben durch $f(x) = x^2$ ist stark konvex.*
   Beweis: *Seien $x, y \in \mathbb{R}$ mit $x \neq y$ und $t \in (0,1)$. Es gilt*

   $$f(tx + (1-t)y) = t^2x^2 + 2t(1-t)xy + (1-t)^2y^2 \text{ und } tf(x) + (1-t)f(y) = tx^2 + (1-t)y^2.$$

   Die Ungleichung die zu zeigen ist, ist äquivalent zu

   $$0 < -t^2x^2 - 2t(1-t)xy - (1-t)^2y^2 + tx^2 + (1-t)y^2.$$

   Die rechte Seite der Ungleichung ist aber gleich zu

   $$t(1-t) \cdot \left[x^2 - 2xy + y^2\right] = t(1-t)(x-y)^2.$$

   Weil $t \in (0,1)$ gilt $t > 0$ und $(1-t) > 0$. Weil $x \neq y$ gilt $(x-y)^2 > 0$. Es gilt also

   $$t(1-t)(x-y)^2 > 0 \quad \forall\, x, y \in \mathbb{R} \text{ mit } x \neq y \text{ und } \forall\, t \in (0,1).$$

   Nichtbeispiel: Die Abbildung $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ gegeben durch $f(x) = \sqrt{|x|}$ ist nicht stark konvex.
   Beweis: *Es seien $1, 3 \in \mathbb{R}$ und $t = \frac{1}{2} \in (0,1)$. Es gilt*

   $$f(\frac{1}{2} \cdot 1 + (1 - \frac{1}{2}) \cdot 3) = f(2) = \sqrt{2} > \frac{1}{2}\sqrt{1} + \frac{1}{2}\sqrt{3}.$$

   Die Ungleichung gilt, weil diese äquivalent zu $2\sqrt{2} > 1 + \sqrt{3}$ ist. Weil beide Seiten positiv sind, ist diese weiterhin äquivalent zu

   $$8 > 4 + 2\sqrt{3} \iff 2 > \sqrt{3} \iff 4 > 3.$$

   (Die Identität $\mathrm{id}_{\mathbb{R}} : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ ist auch ein Nichtbeispiel, weil $\mathrm{id}_{\mathbb{R}}(tx + (1-t)y) = tx + (1-t)y = t\,\mathrm{id}_{\mathbb{R}}(x) + (1-t)\,\mathrm{id}_{\mathbb{R}}(y)$.)