Freie Universität Berlin
Institut für Mathematik
WiSe24/25
Stand: 13. Dezember 2024

A. Constantinescu
O. Parczyk
V. Hiebeler
D. Schlaugies

Mathematik Entdecken 1 – Hausaufgabe 3

L Ö S U N G E N

Aufgabe 1. **2 Punkte**

Man bestimme ob folgende Abbildungen injektiv, beziehungsweise surjektiv, sind. Falls die Eigenschaft gilt, dann definiere man auch eine Links-, beziehungsweise Rechtsinverse.

1. $f : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}$, definiert durch $f(x) = 2x + 3$.
2. $g : \mathbb{Q} \longrightarrow \mathbb{Q}$, definiert durch $g(x) = 2x + 3$.

Lösung zu Übung 1.

1. *Wir zeigen, dass die Abbildung $f : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}$ injektiv ist. Seien $a, b \in \mathbb{Z}$ mit der Eigenschaft, dass $f(a) = f(b)$. Das ist per Definition von f äquivalent zu*

$$2a + 3 = 2b + 3.$$

Wenn wir von beiden Seiten 3 subtrahieren und dann durch 2 teilen, bekommen wir $a = b$. Also f ist injektiv.

Die Abbildung f ist nicht surjektiv, weil $0 \notin \operatorname{Bild} f$. Wir zeigen das durch einen Widerspruchsbeweis: Wenn $0 \in \operatorname{Bild} f$, dann existiert $a \in \mathbb{Z}$, sodass $f(a) = 0$. Das heißt, es existiert $a \in \mathbb{Z}$, sodass $2a + 3 = 0$. Es folgt also, dass $a = -\frac{3}{2} \in \mathbb{Z}$ - und das ist falsch.

2. *Die Abbildung g ist invertierbar, mit Inverse $g^{-1} : \mathbb{Q} \longrightarrow \mathbb{Q}$ gegeben durch $g^{-1}(x) = \frac{x-3}{2}$. Um das zu beweisen, müssen wir überprüfen, dass $g \circ g^{-1} = \mathrm{id}_{\mathbb{Q}}$ und dass $g^{-1} \circ g = \mathrm{id}_{\mathbb{Q}}$. Das ist äquivalent zu*

$$(g \circ g^{-1})(x) = x = (g^{-1} \circ g)(x), \quad \forall x \in \mathbb{Q}.$$

Wir zeigen jetzt diese letzte doppelte Gleichheit. Es ist eine "Für alle..." Aussage, also fangen wir an mit: Sei $x \in \mathbb{Q}$ beliebig. Es gilt

$$\begin{aligned}(g \circ g^{-1})(x) &= g(g^{-1}(x)) = g\left(\frac{x-3}{2}\right) = 2 \cdot \frac{x-3}{2} + 3 = x. \\ (g^{-1} \circ g)(x) &= g^{-1}(g(x)) = g^{-1}(2x+3) = \frac{2x+3-3}{2} = x.\end{aligned}$$

Aufgabe 2. **2 Punkte**

Man betrachte die Mengen $A = \{a, b, c\}$ und $B = \{0, 1\}$.

1. Man gebe alle Abbildungen mit Definitionsbereich A und Wertebereich B an.
2. Man definiere eine bijektive Abbildung

$$F : \{f \mid f : A \longrightarrow B \text{ ist eine Abbildung}\} \longrightarrow 2^{\{a,b,c\}}.$$

(Sie müssen eine Abbildung definieren **und** zeigen, dass diese bijektiv ist.)

Lösung zu Übung 2.

1. *Um eine Abbildung von A nach B vollständig zu beschreiben, ist es notwendig $f(x)$ für jedes $x \in A$ eindeutig als Element von B zu bestimmen. Zum Beispiel, $f : A \longrightarrow B$ ist durch $f(a) = 0$, $f(b) = 1$, $f(c) = 0$ definiert. Man kann das kompakter in einer Tabelle zusammenfassen:*

x	a	b	c
$f(x)$	0	1	0

Wir verwenden diese Bezeichung um alle Abbildungen von A nach B zu beschreiben.

a	b	c
0	0	0

a	b	c
0	0	1

a	b	c
0	1	0

a	b	c
0	1	1

a	b	c
1	0	0

a	b	c
1	0	1

a	b	c
1	1	0

a	b	c
1	1	1

Diese sind alle, weil es für jedes Element aus A genau zwei Möglichkeiten gibt, ein Wert aus B zuzuordnen. Die Wahl für a ist frei. Die Wahl für b ist unabhängig von der für a, und die Wahl von $f(c)$ ist unabhängig von der vorherigen zwei. Insgesamt sind es also 8 Abbildungen.

2. *Wir definieren $F : \{f \mid f : A \longrightarrow B \text{ ist eine Abbildung}\} \longrightarrow 2^{\{a,b,c\}}$ durch*

$$F(f) = \{x \in A \ : \ f(x) = 1\}.$$

Für jede Abbildung $f : A \longrightarrow B$, ist die Menge $\{x \in A \ : \ f(x) = 1\}$ per Definition eine Teilmenge von A. Es ist also ein durch f eindeutig bestimmtes Element von $2^{\{a,b,c\}}$ und somit haben wir tatsächlich eine Abbildung F definiert.
Um die Bijektivität zu beweisen, haben wir mehrere Möglichkeiten:

- *Wir können die Definition überprüfen: F ist injektiv UND F ist surjektiv.*
- *Wir können den Satz verwenden und zeigen, dass F invertierbar ist.*
- *Wir können den Satz verwenden, der sagt, dass wenn A und B endliche Mengen derselben Kardinalität sind, (in diesem Fall 8), dann sind Injektivität, Surjektivität und Bijektivität äquivalente Eigenschaften für Abbildungen $F : A \longrightarrow B$. Das heißt, es reicht nur die Injektivität oder nur die Surjektivität von F zu beweisen.*

Wir verwenden hier die Inverse und definieren $F^{-1} : 2^{\{a,b,c\}} \longrightarrow \{f \mid f : A \longrightarrow B \text{ ist eine Abbildung}\}$ indem wir für alle $M \in 2^{\{a,b,c\}}$, also für alle $M \subseteq A$, ein Element aus dem Definitionsbereich von F zuordnen. Das heißt, wir müssen für jede $M \subseteq A$ eine Abbildung $F^{-1}(M) : A \longrightarrow B$ definieren. Das machen wir durch:

$$F^{-1}(M)(x) = \begin{cases} 1 & \text{wenn } x \in M \\ 0 & \text{wenn } x \notin M. \end{cases}$$

F^{-1} ist eine Abbildung, weil M die Abbildung $F^{-1}(M)$ vollständig und eindeutig definiert. Es ist die Inverse von F weil

$$(F^{-1} \circ F)(f) = F^{-1}(\{x \in A \;\; : \;\; f(x) = 1\}) = f$$

und

$$(F \circ F^{-1})(M) = F(f : A \longrightarrow B, f(x) = 1 \Leftrightarrow x \in M) = M.$$

Zusatzaufgabe 3.

Sei M eine Menge und sei $(M_i)_{i \in I}$ eine Familie von Teilmengen von M. Das heißt $M_i \subseteq M$ für alle $i \in I$. Man zeige, dass

1. $M \setminus \left(\bigcap_{i \in I} M_i\right) = \bigcup_{i \in I}(M \setminus M_i)$.
2. $M \setminus \left(\bigcup_{i \in I} M_i\right) = \bigcap_{i \in I}(M \setminus M_i)$.

Lösung zu Übung 3.

Ich gebe hier zwei verschiedene Arten einen Beweis aufzuschreiben an.

1. *Es sei $x \in M \setminus \left(\bigcap_{i \in I} M_i\right)$ beliebig. Das heißt, dass $x \in M$ und $x \notin \bigcap_{i \in I} M_i$. Also $x \in M$ und es existiert ein $i \in I$ mit $x \notin M_i$. Für dieses i gilt also $x \in M \setminus M_i$. Also, $x \in \bigcup_{i \in I}(M \setminus M_i)$. Somit haben wir die Inklusion "$\subseteq$" bewiesen.*

   Für "$\supseteq$" sei $x \in \bigcup_{i \in I}(M \setminus M_i)$ beliebig. Es existiert also $i \in I$ mit $x \in M \setminus M_i$. Also $x \in M$ und $x \notin M_i$. Insbesondere folgt $x \in M$ und $x \notin \bigcap_{i \in I} M_i$. Das ist aber äquivalent zu $x \in M \setminus \left(\bigcap_{i \in I} M_i\right)$.
2. $$\begin{aligned} x \in M \setminus \left(\bigcup_{i \in I} M_i\right) &\Leftrightarrow x \in M \text{ und } x \notin \bigcup_{i \in I} M_i \\ &\Leftrightarrow x \in M \text{ und } \left(\forall\, i \in I \text{ gilt } x \notin M_i\right) \\ &\Leftrightarrow \forall\, i \in I \text{ gilt } x \in M \text{ und } x \notin M_i \\ &\Leftrightarrow \forall\, i \in I \text{ gilt } x \in M \setminus M_i \\ &\Leftrightarrow x \in \bigcap_{i \in I}(M \setminus M_i). \end{aligned}$$

Zusatzaufgabe* 4.

Es seien $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ und $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ mit folgenden Eigenschaften:

(i) $f(-x) = -f(x) \;\; \forall\, x \in \mathbb{R}$.

(ii) $f(x) \neq 0$, wenn $x \neq 0$.

(iii) Für alle $x, y \in \mathbb{R}$ gelten

$$\begin{aligned} f(x+y) &= f(x) \cdot g(y) + g(x) \cdot f(y), \\ g(x+y) &= g(x) \cdot g(y) - f(x) \cdot f(y). \end{aligned}$$

Man zeige, dass

1. $g(x) = g(-x) \;\; \forall\, x \in \mathbb{R}$.
2. $g(0) = 1$.
3. $f(x)^2 + g(x)^2 = 1 \;\; \forall\, x \in \mathbb{R}$.

Lösung zu Übung 4.

1. *Aus (i) bekommt man $f(0) = -f(0)$, also $f(0) = 0$. Aus der $f(x+y)$ Gleichung mit $y = -x$ bekommt man*

$$0 = f(0) = f(x) \cdot g(-x) + g(x) \cdot f(-x) = f(x)[g(x) - g(-x)]$$

   Weil $f(x) \neq 0$ bekommen wir also $g(x) = g(-x)$.

2. *In derselben Gleichung, wenn wir $y = 0$ setzen, dann bekommen wir*

$$f(x) = f(x) \cdot g(0) + g(x) \cdot f(0).$$

   Also, weil $f(0) = 0$, gilt $f(x)[1 - g(0)] = 0$ für alle x. Also, weil $f(x) \neq 0$ wenn $x \neq 0$, dann gilt $g(0) = 1$.

3. *In der zweiten Gleichung aus (iii) bekommen wir für $y = -x$, dass*

$$1 = g(0) = g(x) \cdot g(-x) - f(x) \cdot f(-x) = g(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot (-f(x)) = f(x)^2 + g(x)^2.$$