Freie Universität Berlin
Institut für Mathematik

SoSe24

A. Constantinescu
S. Tornquist
Z. Adams
D. Schlaugies
A. Zepernick

Stand: 26. Juni 2024

Lineare Algebra 2 – Hausaufgabe 11

Abgabe via Whiteboard als `Name_LA2_H11.pdf` **bis 18:00 am Freitag**, den 5. Juli 2024.

Die Antworten sind stets zu begründen, inklusiv Beispiele.

Aufgabe 1. **3 Punkte**

Seien $\mathbb{K}$ ein Körper mit char $\mathbb{K} \neq 2$ und V ein endlichdimensionaler $\mathbb{K}$-Vektorraum. Sei $\varphi : V \times V \longrightarrow \mathbb{K}$ eine alternierende Bilinearform.

1. Man zeige, dass wenn $\varphi(v, w) \neq 0$, dann $V = \mathrm{Span}_K\{v, w\} \oplus \big(\mathrm{Span}_{\mathbb{K}}\{v, w\}\big)^{\perp}$.
2. Man zeige, dass wenn $v \notin V^{\perp}$, dann existiert $w \in V$ mit $\varphi(v, w) = 1$.
3. Man zeige (durch vollständige Induktion nach $\dim_{\mathbb{K}} V$), dass es eine Basis $\mathcal{B}$ von V. gibt so dass

$$\mathcal{M}^{\mathcal{B}}(\varphi) = \begin{pmatrix} 0 & & & & & \text{O} \\ & \ddots & & & & \\ & & 0 & & & \\ & & & \boxed{S} & & \\ & & & & \ddots & \\ \text{O} & & & & & \boxed{S} \end{pmatrix}, \qquad \text{mit } S = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

(So eine Basis heißt **symplektische Basis** und spielt die analoge Rolle der Orthogonalbasen für symmetrische Bilinearformen.)

Aufgabe 2. **1 Punkt**

Man finde V_+, V_-, V_0 wie in dem Trägheitssatz II von Sylvester für die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathrm{Mat}_3^{\mathrm{sym}}(\mathbb{R}).$$

Total: 4 Punkte

Zusatzaufgaben

Diese Aufgaben werden weder bewertet noch müssen sie abgegeben werden.
Sie werden in den Tutorien besprochen und sind für die Klausurvorbereitung sehr empfohlen.

Zusatzaufgabe* 3.

Man zeige oder man widerlege:

Eine symmetrische Matrix $A \in \mathrm{Mat}_n^{\mathrm{sym}}(\mathbb{R})$ *ist genau dann positiv definit, wenn sie nur positive reelle Eigenwerte hat.*

Hinweis 1: Versuchen Sie nur mit den Instrumenten die bis jetzt eingeführt wurden.

Hinweis 2: Man darf annehmen, dass χ_A in Linearfaktoren in $\mathbb{R}[x]$ zerfällt.

Zusatzaufgabe 4.

Sei W ein $\mathbb{K}$-Vektorraum, W^* dessen Dualraum und sei $V = W \oplus W^*$. Man definiert die Bilinearform $\omega : V \times V \longrightarrow \mathbb{K}$ durch

$$\omega\big((w_1, \ell_1), (w_2, \ell_2)\big) = \ell_2(w_1) - \ell_1(w_2).$$

1. Man zeige, dass ω nicht ausgeartet ist.
2. Man zeige umgekehrt, dass jede alternierende nicht ausgeartete Bilinearform φ auf V so entsteht. Das heißt, es existiert ein $\mathbb{K}$-Vektorraum W, sodass $V \simeq W \oplus W^*$ und φ unter diesem Isomorphismus der obigen Form ω enspricht.
3. Ist W im obigen Punkt eindeutig bestimmt?

Hinweis: Man wähle eine Basis von $V = W \oplus W^*$ und man beschreibe ω durch eine Matrix.

Zusatzaufgabe 5.

1. Man gebe jeweils ein Beispiel einer nicht ausgearteter alternierender und einer symmetrischen Bilinearform $\varphi : V \times V \longrightarrow \mathbb{K}$ und einem Unterraum $U \subseteq V$, sodass $\varphi|_U : U \times U \longrightarrow \mathbb{K}$ ausgeartet ist.
2. Sei $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ und $\varphi : \mathbb{V} \times V \longrightarrow \mathbb{R}$ eine positiv definite stymmetrische Bilinearform. Man zeige, dass $\varphi|_U : U \times U \longrightarrow \mathbb{K}$ für keinen Unterraum $U \subseteq V$ ausgeartet sein kein.

Zusatzaufgabe 6.

Sei $\varphi : V \times \mathbb{V} \longrightarrow \mathbb{K}$ eine nicht ausgeartete alternierende Bilinearform auf dem $\mathbb{K}$-Vektorraum V. Ein $\mathbb{K}$-Untervektorraum U heißt **isotrop**, falls $\varphi(u_1, u_2) = 0$ für alle $u_1, u_2 \in U$.

1. Man finde eine äquivalente Beschreibung der Isotropie von U, die als Beziehung zwischen U und $U^\perp$ ausgedrückt werden kann.
2. Man zeige, dass die Dimension isotroper Unterräume höchstens $\frac{1}{2} \cdot \dim_{\mathbb{K}} V$ ist.
3. Isotrope Unterräume mit $\dim_{\mathbb{K}} U = \frac{1}{2} \cdot \dim_{\mathbb{K}} V$ heißen maximal (oder *Lagrange*). Man zeige, dass es solche Unterräume für alle nicht ausgeartete alternierende Bilinearformen gibt.