Freie Universität Berlin
Institut für Mathematik

SoSe24
A. Constantinescu
S. Tornquist
Z. Adams
D. Schlaugies
A. Zepernick

Stand: 12. Juni 2024

Lineare Algebra 2 – Hausaufgabe 9

Abgabe via Whiteboard als `Name_LA2_H9.pdf` **bis 18:00 am Freitag**, den 21. Juni 2024.

Die Antworten sind stets zu begründen, inklusiv Beispiele.

Aufgabe 1. **2 Punkte**

Sei $n \in \mathbb{N}_{>0}$ und sei S_n die Symmetrische Gruppe. Für alle $\sigma \in S_n$ ist die Permutationsmatrix $P_\sigma = (p_{i,j}) \in \mathrm{Mat}_n(\mathbb{C})$ definiert durch $p_{i,j} = \delta_{i,\sigma(j)}$, wobei $\delta_{a,b}$ das Kronecker-Delta ist.

Man bestimme e^{P_σ} für den 4-Zyklus $\sigma = (1\ 2\ 3\ 4) \in S_4$.

Aufgabe 2. **2 Punkte**

Man betrachte den $\mathbb{R}$-Vektorraum $V = \mathbb{R}[x]_{\leqslant 2} = \{f \in \mathbb{R}[x] \ : \ \mathrm{Grad}\, f \leqslant 2\}$ zusammen mit der Basis $\mathcal{B} = 1, x, x^2$. Man bestimme $\mathcal{M}^{\mathcal{B}}(\varphi)$ für die Bilinearform $\varphi \in \mathrm{Bil}_{\mathbb{R}}(V)$ gegeben durch

$$\varphi(f_1, f_2) := \int_0^1 f_1(x) \cdot f_2(x) \mathrm{d}x.$$

Total: 4 Punkte

Zusatzaufgaben auf der Rückseite

Zusatzaufgaben

Diese Aufgaben werden weder bewertet noch müssen sie abgegeben werden.
Sie werden in den Tutorien besprochen und sind für die Klausurvorbereitung sehr empfohlen.

Zusatzaufgabe 3.

Man berechne die Jordansche Normalform der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathrm{Mat}_5(\mathbb{C}).$$

Zusatzaufgabe 4.

Seien $A, B \in \mathrm{Mat}_n(\mathbb{C})$ zwei nilpotente Matrizen. Man zeige oder man widerlege:

1. Wenn $\dim_{\mathbb{C}} \operatorname{Ker} A = \dim_{\mathbb{C}} \operatorname{Ker} B = 1$, dann sind A und B ähnlich.
2. Wenn $\dim_{\mathbb{C}} \operatorname{Ker} A = \dim_{\mathbb{C}} \operatorname{Ker} B = 2$, dann sind A und B ähnlich.
3. Wenn $\dim_{\mathbb{C}} \operatorname{Ker} A = \dim_{\mathbb{C}} \operatorname{Ker} B = 3$, dann sind A und B ähnlich.

Zusatzaufgabe 5.

Sei $A \in \mathrm{Mat}_n(\mathbb{C})$. Man zeige, dass

$$\det \exp(A) = e^{\mathrm{Spur}\, A}.$$

Zusatzaufgabe 6.

Seien V ein endlichdimensionaler $\mathbb{K}$-Vektorraum, $\mathcal{B}$ eine Basis von V, und $\varphi \in \mathrm{Bil}_{\mathbb{K}}(V)$.

1. Ist die Determinante $\det \mathcal{M}_\varphi^{\mathcal{B}}$ von der Basiswahl unabhängig wenn $\mathbb{K} = \mathbb{C}$?
2. Gibt es Körper für welche die Antwort eine andere ist als für $\mathbb{K} = \mathbb{C}$?