Freie Universität Berlin
Institut für Mathematik

SoSe24
A. Constantinescu
S. Tornquist
Z. Adams
D. Schlaugies
A. Zepernick

Stand: 23. Mai 2024

Lineare Algebra 2 – Hausaufgabe 6

Abgabe via Whiteboard als `Name_LA2_H6.pdf` **bis 18:00 am Freitag**, den 31. Mai 2024.

Die Antworten sind stets zu begründen, inklusiv Beispiele.

Aufgabe 1. **2 Punkte**

1. Man zeige, dass wenn $A \in \mathrm{Mat}_2(\mathbb{K})$ eine Matrix mit $\det A = 0$ ist, dann gilt für alle $n \in \mathbb{N}_{>0}$
$$A^n = \big(\mathrm{Spur}(A)\big)^{n-1} \cdot A.$$

2. Man berechne A^{120} für die Matrix $A = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \in \mathrm{Mat}_2(\mathbb{R})$.

Aufgabe 2. **2 Punkte**

Seien V ein endlich dimensionaler $\mathbb{K}$-Vektorraum, $f \in \mathrm{End}_{\mathbb{K}}(V)$ und $U \subseteq_{\mathbb{K}} V$ mit der Eigenschaft, dass $f(U) \subseteq U$. Sei $f_U : U \longrightarrow U$ die Einschränkung von f auf U. Man zeige, dass
$$\mathrm{mPol}_{f_U} \mid \mathrm{mPol}_f\,.$$

Total: 4 Punkte

Zusatzaufgaben auf der Rückseite

Zusatzaufgaben

Diese Aufgaben werden weder bewertet noch müssen sie abgegeben werden.
Sie werden in den Tutorien besprochen und sind für die Klausurvorbereitung sehr empfohlen.

Zusatzaufgabe 3.

Sei $A = \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$. Ist $\mathbb{R}[A]$ ein Körper? Ist $\mathbb{C}[A]$ ein Körper?

Zusatzaufgabe 4.

1. Man zeige, dass $\operatorname{Spur}(ABC) = \operatorname{Spur}(CAB) = \operatorname{Spur}(BCA)$ für alle $A, B, C \in \operatorname{Mat}_n(\mathbb{K})$.

2. Man zeige, dass es $A, B, C \in \operatorname{Mat}_n(\mathbb{K})$ gibt, mit $\operatorname{Spur}(ABC) \neq \operatorname{Spur}(ACB)$.

Zusatzaufgabe 5.

In dieser Aufgabe bezeichnen A und B quadratische Matrizen mit der Eigenschaft, dass für alle Polynome $p \in \mathbb{R}[x]$ mit $\deg p = 1$ gilt $p(A) \neq 0 \neq p(B)$.

1. Man zeige, dass wenn $A, B \in \operatorname{Mat}_2(\mathbb{R})$ die Gleichung
$$A^2 - 5A + 6I_2 = B^2 - 5B + 6I_2 = 0 \qquad (\star)$$
erfüllen, dann sind A und B ähnlich.
2. Man gebe ein Beispiel von $A, B \in \operatorname{Mat}_2(\mathbb{R})$, mit $A \neq B$, die die Gleichung $(\star)$ erfüllen.
3. Man gebe ein Beispiel von $A, B \in \operatorname{Mat}_3(\mathbb{R})$, mit
   - $A \not\sim B$,
   - A und B erfüllen die Gleichung $(\star)$ mit I_3 an der Stelle von I_2.

Zusatzaufgabe 6.

Sei V ein endlichdimensionaler $\mathbb{R}$-Vektorraum und seien $f, g \in \operatorname{End}_{\mathbb{R}}(V)$.

1. Zeigen Sie, dass wenn $f \circ g - g \circ f = \lambda \cdot \mathrm{id}_V$, dann $\lambda = 0$.*
2. Gilt die obige Aussage auch wenn man $\mathbb{R}$ mit dem Körper $\mathbb{F}_2$ ersetzt?
3. Sei $\mathbb{C}^\infty(\mathbb{R})$ der $\mathbb{R}$-Vektorraum der unendlich oft differenzierbaren Funktionen auf $\mathbb{R}$. Sei $P : \mathbb{C}^\infty(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{C}^\infty(\mathbb{R})$ der Endomorphismus von $\mathbb{C}^\infty(\mathbb{R})$ gegeben durch
$$(P(f))(t) = f'(t), \quad \forall\, f \in \mathbb{C}^\infty(\mathbb{R}) \;\text{ und } t \in \mathbb{R}.$$
Sei $Q : \mathbb{C}^\infty(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{C}^\infty(\mathbb{R})$ der Endomorphismus von $\mathbb{C}^\infty(\mathbb{R})$ gegeben durch
$$(Q(f))(t) = t \cdot f(t), \quad \forall\, f \in \mathbb{C}^\infty(\mathbb{R}) \;\text{ und } t \in \mathbb{R}.$$
Zeigen Sie, dass $P \circ Q - Q \circ P = \mathrm{id}_{\mathbb{C}^\infty(\mathbb{R})}$.

*Hinweis: Man betrachte die Spur auf beiden Seiten.Diese ist nur für endlich dimensionale Vektorräume definiert.