Freie Universität Berlin
Institut für Mathematik

SoSe24

A. Constantinescu
S. Tornquist
Z. Adams
D. Schlaugies
A. Zepernick

Stand: 16. Mai 2024

Lineare Algebra 2 – Hausaufgabe 5

Abgabe via Whiteboard als `Name_LA2_H5.pdf` **bis 18:00 am Freitag**, den 24. Mai 2024.

Die Antworten sind stets zu begründen, inklusiv Beispiele.

Aufgabe 1. **3 Punkte**

Man betrachte den $\mathbb{R}$-Vektorraum $\mathrm{Mat}_2(\mathbb{R})$.

Sei $T = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathrm{Mat}_2(\mathbb{R})$ und Sei $\Phi : \mathrm{Mat}_2(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathrm{Mat}_2(\mathbb{R})$ die Abbildung gegeben durch

$$\Phi(X) = T^{-1}XT.$$

1. Man zeige, dass $\Phi \in \mathrm{End}_{\mathbb{R}}(\mathrm{Mat}_2(\mathbb{R}))$ und man berechne χ_Φ.
2. Ist Φ trigonalisierbar?
3. Ist Φ diagonalisierbar?

Aufgabe 2. **1 Punkt**

Man zeige*, dass wenn $A \sim B$ ähnliche Matrizen sind, dann gilt $\mathrm{Spur}\, A = \mathrm{Spur}\, B$.

Total: 4 Punkte

`Folgende Aufgabe wird nicht bewertet und soll nicht abgegeben werden:`

Leseaufgabe 3. **∼1 Stunde**

Lesen Sie Abschnitt 10.5.1 **Das Verfahren zur Diagonalisierung** im Non-Skript.

`Zusatzaufgaben auf der Rückseite`

***Hinweis:** Eine Zusatzaufgabe kann darf verwendet werden.

Zusatzaufgaben

Diese Aufgaben werden weder bewertet noch müssen sie abgegeben werden.
Sie werden in den Tutorien besprochen und sind für die Klausurvorbereitung sehr empfohlen.

Zusatzaufgabe 4.

Sei $A = (a_{ij}) \in \mathrm{Mat}_n(\mathbb{K})$ eine Matrix und sei

$$\chi_A(x) = x^n + c_{n-1}x^{n-1} + \cdots + c_1 x + c_0 \in \mathbb{K}[x]$$

das charakteristische Polynom von A.

1. Man zeige, dass $c_{n-1} = -\operatorname{Spur}(A)$.
2. Man zeige, dass $c_0 = (-1)^n \det A$.
3. Man finde eine Formel für c_1 als Summe von Minoren von A wenn $n = 3$.

Zusatzaufgabe 5.

Seien $n \in \mathbb{N}_{>0}$, V ein $\mathbb{K}$-Vektorraum mit $\dim_{\mathbb{K}} V = n$, und $f \in \mathrm{End}_{\mathbb{K}}(V)$. Man zeige†, dass es ein Polynom $p \in \mathbb{K}[x] \setminus \{0\}$ existiert mit $p(f) = 0 \in \mathrm{End}_{\mathbb{K}}(V)$‡ .

Zusatzaufgabe 6.

Man berechne die Eigenwerte und deren algebraischen und geometrischen Vielfachheit für folgende Matrizen. Sind diese diagonalisierbar?

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \in \mathrm{Mat}_4(\mathbb{R}) \qquad B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 2 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \\ 2 & -1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \in \mathrm{Mat}_4(\mathbb{C}).$$

Zusatzaufgabe 7.

Es sei V ein endlich dimensionaler $\mathbb{K}$-Vektorraum, $f \in \mathrm{End}_{\mathbb{K}}(V)$ ein Endomorphismus und $p \in \mathbb{K}[x]$ ein Polynom. Man zeige, dass für jeden Eigenwert λ von f, $p(\lambda)$ ein Eigenwert von $p(f)$ ist.

† ohne den Satz von Cayley-Hamilton oder das Minimalpolynom anzuwenden!

‡Hinweis: Betrachte $\dim_{\mathbb{K}} \mathrm{End}_{\mathbb{K}}(V)$ und $\{f^i \ : \ i \in \mathbb{N}\}$