Freie Universität Berlin
Institut für Mathematik

SoSe24
A. Constantinescu
S. Tornquist
Z. Adams
D. Schlaugies
A. Zepernick

Stand: 9. Mai 2024

Lineare Algebra 2 – Hausaufgabe 4

Abgabe via Whiteboard als `Name_LA2_H4.pdf` **bis 18:00 am Freitag**, den 17. Mai 2024.

Die Antworten sind stets zu begründen, inklusiv Beispiele.

Aufgabe 1. **2 Punkte**

Zerfällt das Polynom $x^3 - 19x + 12 \in \mathbb{R}[x]$ vollständig in Linearfaktoren?

Aufgabe 2. **2 Punkte**

Man zeige oder man widerlege folgende Aussagen:

1. *Für alle* $A, B \in \mathrm{Mat}_2(\mathbb{R})$ *gilt: wenn* $A \sim B$ *und* $A \neq B$*, dann ist die Matrix* $T \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$ *mit* $A = T^{-1}BT$ *eindeutig bestimmt.*
2. *Für alle* $A, B \in \mathrm{Mat}_2(\mathbb{R})$ *gilt: wenn* $A \sim B$*, dann existiert eine Matrix* $T \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$ *mit* $\det T = 1$*, sodass* $A = T^{-1}BT$*.*

Total: 4 Punkte

`Folgende Aufgabe wird nicht bewertet und soll nicht abgegeben werden:`

Leseaufgabe 3. **$\sim$1 Stunde**

Lesen Sie aus dem Non-Skript Abschnitt 9.4. **Wie findet man Nullstellen von Polynomen?**: Seite 207 bis Seite 209.

`Zusatzaufgaben auf der Rückseite`

Zusatzaufgaben

Diese Aufgaben werden weder bewertet noch müssen sie abgegeben werden.
Sie werden in den Tutorien besprochen und sind für die Klausurvorbereitung sehr empfohlen.

Zusatzaufgabe 4.

Man zerlege als Produkt **irreduzibler** Polynome in $\mathbb{R}[x]$ folgende Polynome:

1. $x^4 - 1$.
2. $x^6 - 1$.
3. $x^8 - 1$.

Ein Polynom $f \in \mathbb{K}[x]$ ist **irreduzibel**, wenn $\deg f > 0$ und wenn es keine Polynome $g, h \in \mathbb{K}[x]$ gibt, sodass $f = g \cdot h$, mit $\deg g < \deg f$ und $\deg h < \deg f$.

Zusatzaufgabe 5.

Sei $\mathbb{C} = \{a + b \cdot i \ : \ a, b \in \mathbb{R} \text{ und } i = \sqrt{-1}\}$ der Körper der komplexen Zahlen. Man betrachtet $\mathbb{R}$ als Teilkörper durch $\mathbb{R} = \{a + 0 \cdot i \ : \ a \in \mathbb{R}\}$. Die zu $z = a + b \cdot i$ **konjugierte** komplexe Zahl ist:

$$\bar{z} = a - b \cdot i \in \mathbb{C}.$$

1. Man zeige, dass $z = \bar{z} \iff z \in \mathbb{R}$.
2. Man zeige, dass die Konjugation $\bar{\ } : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$, $z \mapsto \bar{z}$, ein Körperautomorphismus* ist.

Sei $p \in \mathbb{R}[x]$ ein Polynom und $z \in \mathbb{C}$. †

3. Man zeige, dass wenn $p(z) = 0$, dann gilt auch $p(\bar{z}) = 0$.
4. Man schließe daraus, dass es $\lambda_1, \ldots, \lambda_m \in \mathbb{R}$, $l_1, \ldots, l_m \in \mathbb{N}_{>0}$ und $f_1, \ldots, f_r \in \mathbb{R}[x]$ irreduzibel mit Grad $f_i = 2 \ \ \forall\, i = 1, \ldots, r$ existieren, sodass
$$p = (x - \lambda_1)^{l_1} \cdot \ldots \cdot (x - \lambda_m)^{l_m} \cdot f_1 \cdot \ldots \cdot f_r, \qquad \text{mit } \mu_a(p, \lambda_i) = l_i, \ \forall\, i = 1, \ldots, m.$$

Zusatzaufgabe 6.

Seien $f = x^2 + x + 1$ and $g = x^2 + 2x + 1$ in $\mathbb{R}[x]$. Man zeige oder man widerlege:

1. Es existieren unendlich viele Matrizen $A \in \mathrm{Mat}_2(\mathbb{R})$, sodass $f(A) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.
2. Es existieren unendlich viele Matrizen $A \in \mathrm{Mat}_2(\mathbb{R})$, sodass $g(A) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Zusatzaufgabe 7.

Zeigen Sie, dass die Ähnlichkeit von Matrizen eine Äquivalenzrelation auf $\mathrm{Mat}_n(\mathbb{K})$ ist.

---

* d.h. ein bijektiver Ringhomomorphismus von $\mathbb{C}$ nach $\mathbb{C}$.

† Wir betrachten p auch als Element von $\mathbb{C}[x]$, dessen Koeffizienten reelle Zahlen sind. Deswegen sprechen wir von komplexen Nullstellen von p.

Zusatzaufgabe 8.

Sei $V = \mathbb{R}^n$ und $f \in \mathrm{End}_{\mathbb{R}}(V)$ mit $f^2 = f \circ f = \mathrm{id}_V$. Man beweise, dass

1. $\det f \in \{\pm 1\}$.
2. wenn λ ein Eigenwert von f ist, dann gilt $\lambda \in \{\pm 1\}$.
3. $V = \mathrm{Eig}(f, 1) \oplus \mathrm{Eig}(f, -1)$. [§]

[§] Hinweis: $v = \frac{1}{2}(v + f(v)) + \frac{1}{2}(v - f(v))$