Freie Universität Berlin
Institut für Mathematik

SoSe24
A. Constantinescu
S. Tornquist
Z. Adams
D. Schlaugies
A. Zepernick

Stand: 2. Mai 2024

Lineare Algebra 2 – Hausaufgabe 3

Abgabe via Whiteboard als `Name_LA2_H3.pdf` **bis 18:00 am Freitag**, den 10. Mai 2024.

Die Antworten sind stets zu begründen, inklusiv Beispiele.

Aufgabe 1. **2 Punkte**

Berechnen Sie $\det A$, $\det B$, $\det(A+B)$, $\det(AB)$, $\det(A^2B)$, $\det(A^2B+A^3)$ für

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -1 & 0 & -3 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad B = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \\ -2 & -2 & 0 \end{pmatrix} \in \mathrm{Mat}_3(\mathbb{R}).$$

Aufgabe 2. **2 Punkte**

Eine Matrix $A = (a_{ij}) \in \mathrm{Mat}_n(R)$ heißt **obere** (beziehungsweise **untere**) **Dreiecksmatrix** wenn

$$a_{ij} = 0 \;\; \forall\, i > j \qquad (\text{beziehungsweise } a_{ij} = 0 \;\; \forall\, i < j).$$

Zeigen Sie, dass sowohl für obere als auch für untere Dreiecksmatrizen A gilt

$$\det A = \prod_{i=1}^{n} a_{ii}.$$

Total: 4 Punkte

`Folgende Aufgabe wird nicht bewertet und soll nicht abgegeben werden:`

Leseaufgabe 3. **∼1 Stunde**

Lesen Sie den Abschnitt §9.1 **Der Polynomiring über** $\mathbb{K}$ im Nonskript[†]. In der Vorlesung wird das als bekannt angenommen.

`Zusatzaufgaben auf der Rückseite`

[†] Seiten 200-202, V. vom 29. April 2024

Zusatzaufgaben

Diese Aufgaben werden weder bewertet noch müssen sie abgegeben werden.
Sie werden in den Tutorien besprochen und sind für die Klausurvorbereitung sehr empfohlen.

Zusatzaufgabe 4.

Man zeige, dass für jedes $n \in \mathbb{N}_{>2}$, die symmetrische Gruppe S_n mit zwei Elementen erzeugt werden kann.

Hinweis: Man wähle eine Transposition und einen n-Zyklus

Zusatzaufgabe 5.

Sei $A = (a_{ij}) \in \mathrm{Mat}_n(\mathbb{R})$ gegeben durch $a_{ij} = 1 - \delta_{ij}$, wobei

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{wenn } i = j \\ 0 & \text{wenn } i \neq j \end{cases}.$$

Zeigen Sie, dass

$$\det A = (-1)^{n-1}(n-1).$$

Zusatzaufgabe 6.

Finden Sie eine Formel für die Determinanten folgender $n \times n$ Matrizen, und beweisen Sie durch vollständige Induktion, dass die Formel gilt:

$$A_n = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \\ & & \iddots & & \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad B_n = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & \dots & 0 & 0 \\ & & & & \ddots & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Zusatzaufgabe* 7.

Schreiben Sie folgende Determinante als Produkt auf

$$\det \begin{pmatrix} a+b & -a+b-c & b+c \\ a-b-c & a+b & a+c \\ a+c & b+c & -a-b+c \end{pmatrix}.$$

(Z.B. die Determinante $\det \begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix}$ als Produkt aufgeschrieben ist $(a-b)(a+b)$.)