Freie Universität Berlin
Institut für Mathematik

WiSe23/24
A. Constantinescu
J. Plock
F. Ugolini

Stand: 17. Februar 2024

Lineare Algebra 1 – Hausaufgabe 16 – Bonusblatt

Wird nur dann korrigiert, wenn die Punktzahl aus den ersten 15 Blätter **zwischen 27 und 32** liegt.
Abgabe via Whiteboard als `Name_LA1_H16pdf` **bis 18:00 am Mittwoch**, den 28. Februar 2024.

Die Antworten sind stets zu begründen, inklusiv Beispiele.

Übung 1. **4 Punkte**

Sei $\mathbb{K}^{\mathbb{N}} = \{(a_i)_{i\in\mathbb{N}}\}$ der $\mathbb{K}$-Vektorraum aller Abbildungen† $\mathbf{a} : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{K}$. Für alle $i \in \mathbb{N}$ bezeichnet $e_j = (\delta_{ji})_{i\in\mathbb{N}}$ die Abbildung die i auf 1 abbildet und alle anderen natürlichen Zahlen auf 0. Für alle $i \in \mathbb{N}$ bezeichnet $f_{\geqslant i} \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ die Abbildung definiert durch

$$f_{\geqslant i}(j) = \begin{cases} 0, & \text{wenn } j < i, \\ 1, & \text{wenn } j \geqslant i. \end{cases}$$

1. Ist die Menge $\{e_i \ : \ i \in \mathbb{N}\}$ ein Erzeugendensystem von $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$?
2. Ist die Menge $\{e_i \ : \ i \in \mathbb{N}\}$ linear unabhängig?

Man betrachte den $\mathbb{K}$-UVR $U := \mathrm{Span}_{\mathbb{K}}\{e_i \ : \ i \in \mathbb{N}\}$ und den Quotientenraum $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}/U$.

3. Ist die Menge $\{[f_{\geqslant i}] \ : \ i \in \mathbb{N}\} \subseteq \mathbb{K}^{\mathbb{N}}/U$ linear unabhängig? Hier bezeichnet $[f]$ die Äquivalenzklasse modulo U.
4. Man bestimme $\dim_{\mathbb{K}} \mathrm{Span}\{[f_{\geqslant i}] \ : \ i \in \mathbb{N}\}$.

Übung 2. **2 Punkte**

Geben Sie jeweils ein Beispiel einer $\mathbb{K}$-linearen Abbildung $f : V \longrightarrow W$ mit $\mathrm{Ker}(f) \neq V$ und $\mathrm{Bild}(f) \neq W$, sodass es eine Basis B von V gibt mit

1. $f(B)$ ist eine Basis von $\mathrm{Bild}(f)$.
2. $f(B)$ ist nicht eine Basis von $\mathrm{Bild}(f)$.

Total: 6 Punkte

---

†Ein unendliches Tupel wie hier ist per Definition eine Abbildung $\mathbf{a} : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{K}$. An der Stelle i wird $a_i := \mathbf{a}(i)$ geschrieben.