Freie Universität Berlin
Institut für Mathematik

Stand: 7. Februar 2024

WiSe23/24
A. Constantinescu
J. Plock
F. Ugolini

Lineare Algebra 1 – Hausaufgabe 15

Abgabe via Whiteboard als `Name_LA1_H15.pdf` **bis 18:00 am Mittwoch**, den 14. Februar 2024.

Die Antworten sind stets zu begründen, inklusiv Beispiele.

Übung 1. **2 Punkte**

Seien V und W endlichdimensionale $\mathbb{K}$-Vektorräume und sei $f \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(V, W)$ mit $\mathrm{Rang}(f) = r$. Man beweise, dass es geordnete Basen B von V und C von W gibt, sodass

$$M_C^B(f) = \left(\begin{array}{c|c} I_r & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right),$$

wobei I_r die $r \times r$ Identitätsmatrix ist und die "0" für Blöcke mit Nulleinträgen stehen.

Übung 2. **2 Punkte**

Seien U, W zwei Untervektorräume eines euklidischen Vektorraumes. Zeigen Sie, dass

$$(W+U)^\perp = W^\perp \cap U^\perp \qquad \text{und} \qquad (W \cap U)^\perp = W^\perp + U^\perp.$$

Total: 4 Punkte

`Zusatzaufgaben auf der Rückseite`

Zusatzaufgaben

Diese Aufgaben werden weder bewertet noch müssen sie abgegeben werden.
Sie werden in den Tutorien besprochen und sind für die Klausurvorbereitung sehr empfohlen.

Zusatzaufgabe 3.

Man finde eine Basis von $\mathrm{Ker}(f_{A_i})$ und eine Basis $\mathrm{Bild}(f_{A_i})$, und man ergänze jede von diesen zu einer Basis von $\mathbb{R}^m$, beziehungsweise $\mathbb{R}^n$, für folgende $m \times n$ Matrizen

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 8 \end{pmatrix} \quad A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 4 \end{pmatrix} \quad A_3 = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 2 & -6 \\ 3 & -9 \end{pmatrix} \quad A_4 = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Zusatzaufgabe 4.

Gibt es Matrizen $A \in \mathrm{Mat}_{2,3}(\mathbb{Q})$ und $B \in \mathrm{Mat}_{3,2}(\mathbb{Q})$, sodass

1. $AB = I_2$?
2. $BA = I_2$?
3. $AB = I_3$?
4. $BA = I_3$?

Falls “Ja”, geben Sie ein Beispleil; falls “Nein”, geben Sie eine Begründung.

Zusatzaufgabe 5.

Sei V ein euklidischer Vektorraum, und seien $v, w \in V$. Zeigen Sie, dass wenn $\|v\| = \|w\|$, dann $(v + w) \perp (v - w)$. Welche geometrische Bedeutung hat diese Aussage?

Zusatzaufgabe 6.

Beschreiben Sie die Menge aller Parameter $t, s \in \mathbb{R}$ für denen die Vektoren $v = (1, -2, -t, 3)$ und $w = (s, -4, 1, -2)$ des euklidischen Standardraumes $\mathbb{R}^4$ orthogonal sind.