Freie Universität Berlin
Institut für Mathematik

WiSe23/24
A. Constantinescu
J. Plock
F. Ugolini

Stand: 1. Februar 2024

Lineare Algebra 1 – Hausaufgabe 14

Abgabe via Whiteboard als `Name_LA1_H14.pdf` **bis 18:00 am Mittwoch**, den 7. Januar 2024.

Die Antworten sind stets zu begründen, inklusiv Beispiele.

Aufgabe 1. **2 Punkte**

Sei $E = \{e_1, e_2\}$ die Standardbasis des $\mathbb{R}$-Vektorraumes $\mathbb{R}^2$ und $B = \{e_1 + e_2, e_1 - e_2\} \subseteq \mathbb{R}^2$ eine weitere Basis. Bestimmen Sie die zugeordneten Matrizen $M_E^E(f)$ und $M_B^B(f)$ für folgende Endomorphismen f von $\mathbb{R}^2$:

1. $f = f_\lambda : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ mit $f_\lambda(x, y) = \lambda \cdot (x, y)$, für $\lambda \in \mathbb{R}$.
2. f ist die Spiegelung an der x-Achse.
3. $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ gegeben durch $f(x, y) := (x + y, y)$.

Aufgabe 2. **2 Punkte**

Seien $U = \mathrm{Span}_{\mathbb{Q}}\{(-4, 2, 1)\}$ und $V = \{(x, y, z) \in \mathbb{Q}^3 \ : \ x + y + z = 0\}$ zwei $\mathbb{Q}$-UVR von $\mathbb{Q}^3$.

1. Wie erkennt man am schnellsten, dass U und V komplementär zueinander sind?
2. Man gebe eine Basis B für V an. Wie erkennt man an $\{(-4, 2, 1)\}$ und B, dass U und V komplementär zueinander sind?
3. Sei $p : \mathbb{Q}^3 = U \oplus V \longrightarrow V$ die kanonische Projektion auf V entlang U:
$$p(u + v) := v.$$
Man berechne die Darstellungsbatrix $M_B^{\mathcal{E}}(p)$, wobei $\mathcal{E} = (1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)$ die Standardbasis von $\mathbb{Q}^3$ bezeichnet.
4. Man setze $B' = \{(-4, 2, 1)\} \cup B$ als Basis von $\mathbb{Q}^3$, wobei B die Basis aus Punkt 2 ist, und man berechne $M_B^{B'}(p)$.

Total: 4 Punkte

Zusatzaufgaben auf der Rückseite

Zusatzaufgaben

Diese Aufgaben werden weder bewertet noch müssen sie abgegeben werden.
Sie werden in den Tutorien besprochen und sind für die Klausurvorbereitung sehr empfohlen.

Zusatzaufgabe 3.

Sei $B = \{v_1, \dots, v_n\}$ eine Basis des $\mathbb{K}$-Vektorraumes V. Für jeden $i = 1, \dots, n$ definiere den $\mathbb{K}$-Untervektorraum:

$$V_i := \mathrm{Span}_{\mathbb{K}} \{v_1, \dots, v_i\}.$$

Sei $f \in \mathrm{End}_{\mathbb{K}}(V)$. Welche Auswirkung hat die Eigenschaft

$$f(V_j) \subseteq V_j, \quad \forall\, j$$

auf die Gestalt der zugeordneten Matrix $M_B^B(f)$?

Zusatzaufgabe 4.

Seien folgende $\mathbb{Q}$-Unterräume von $\mathbb{Q}^4$:

$$\begin{aligned} U_1 &= \mathrm{Span}_{\mathbb{K}} \{(1,1,0,0), (2,1,-1,1), (-1,1,0,1)\}, \\ U_2 &= \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{Q}^4 \mid x_1 + x_2 = x_3 + x_4 = 0\}. \end{aligned}$$

1. Geben Sie U_1 als Lösungsmenge eines lineares Gleichungssystems an.
2. Bestimmen Sie eine Basis von U_2.
3. Bestimmen Sie ein Erzeugendensystem von $U_1 \cap U_2$.
4. Geben Sie $U_1 + U_2$ als Lösungsmenge eines LGS an.
5. Bestimmen Sie $\dim_{\mathbb{Q}} U_1$, $\dim_{\mathbb{Q}} U_2$, $\dim_{\mathbb{Q}}(U_1 \cap U_2)$, $\dim_{\mathbb{Q}}(U_1 + U_2)$.

Kapitel 6 im Non-Skript kann hier helfen, und Sie dürfen ein Computer um (reduzierte) Zeilenstufenformen auszurechnen verwenden.

Zusatzaufgabe 5.

Sei $\mathbb{K}[x]$ der $\mathbb{K}$-Vektorraum der Polynome in einer Variable x. Sei $ev_0 : \mathbb{K}[x] \longrightarrow \mathbb{K}$ mit

$$ev_0(f) := f(0).$$

1. Man zeige, dass ev_0 eine lineare Abbildung ist.
2. Man bestimme $U = \mathrm{Ker}(ev_0)$.
3. Man berechne $\dim_{\mathbb{K}} U$ und $\dim_{\mathbb{K}}(\mathbb{K}[x]/U)$.

Zusatzaufgabe 6.

Sei V ein $\mathbb{K}$-Vektorraum uns seien $f, g \in \mathrm{End}_{\mathbb{K}}(V)$ zwei Endomorphismen von V.

1. Man zeige, dass wenn V endlich-dimensional ist, dann gilt

$$f \circ g \text{ ist bijektiv } \Leftrightarrow f \text{ und } g \text{ beide bijektiv sind.}$$

2. Man finde ein Beispiel mit $\dim_{\mathbb{K}} V = \infty$, wo die obige Äquivalenz nicht gilt.