Freie Universität Berlin
Institut für Mathematik

WiSe23/24
A. Constantinescu
J. Plock
F. Ugolini

Stand: 24. Januar 2024

Lineare Algebra 1 – Hausaufgabe 13

Abgabe via Whiteboard als `Name_LA1_H13.pdf` **bis 18:00 am Mittwoch**, den 31. Januar 2024.

Die Antworten sind stets zu begründen, inklusiv Beispiele.

Aufgabe 1. **2 Punkte**

Sei V ein endlich-dimensionaler $\mathbb{K}$-Vektorraum und $f \in \operatorname{End}_{\mathbb{K}}(V)$, das heißt $f : V \longrightarrow V$ ist $\mathbb{K}$-linear. Mit f^2 bezeichnet man $f \circ f$.

1. Man zeige, dass $\operatorname{Bild} f^2 \subseteq \operatorname{Bild} f$ und $\operatorname{Ker} f \subseteq \operatorname{Ker} f^2$.
2. Man zeige, dass folgende Aussagen äquivalent sind
   (a) $\operatorname{Bild} f^2 = \operatorname{Bild} f$.
   (b) $\operatorname{Ker} f = \operatorname{Ker} f^2$.
   (c) $\operatorname{Bild} f \cap \operatorname{Ker} f = 0$.
   (d) $V = \operatorname{Bild} f \oplus \operatorname{Ker} f$.

Aufgabe 2. **2 Punkte**

Sei $U = \operatorname{Span}_{\mathbb{R}}\{(1,1,1)\} \subseteq_{\mathbb{R}} \mathbb{R}^3$. Bezeichne für $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ die Restklasse modulo U mit

$$[x,y,z] := (x,y,z) + U \in V/U.$$

1. Man zeige, dass die Vektoren $[2,1,1], [1,2,1], [1,1,2] \in V/U$ linear abhängig sind.
2. Man finde eine Basis von V/U.
3. Man gebe ein Beispiel einer injektiven $\mathbb{K}$-linearen Abbildung $f : V/U \longrightarrow \mathbb{R}^4$.

Total: 4 Punkte

`Zusatzaufgaben auf der Rückseite`

Zusatzaufgaben

Diese Aufgaben werden weder bewertet noch müssen sie abgegeben werden.
Sie werden in den Tutorien besprochen und sind für die Klausurvorbereitung sehr empfohlen.

Zusatzaufgabe 3.

Sei V ein $\mathbb{K}$-Vektorraum und seien $U_1, U_2 \subseteq_{\mathbb{K}} V$ zwei $\mathbb{K}$-Unterräume. Man zeige, dass

1. $(U_1 + U_2)/U_1 \simeq U_2/(U_1 \cap U_2)$.
2. $(U_1 \oplus U_2)/(U_1 \cap U_2) \simeq U_1 + U_2$.
3. $U_1 \oplus U_2 = V \iff$ die kanonische Abbildung $U_2 \longrightarrow V/U_1$ ist ein Isomoprphismus.

   (Die "kanonische" Abbildung ist die Verknüpfung der kanonischen Inklusion $U_2 \longrightarrow V$ und der kanonischen Projektion $V \longrightarrow V/U$.)

Zusatzaufgabe 4.

Welche der folgenden Teilmengen des $\mathbb{R}$-Vektorraumes $\mathrm{Abb}(\mathbb{N}, \mathbb{R}) = \prod_{n \in \mathbb{N}} \mathbb{R}$ sind $\mathbb{R}$-UVR? Für die die Untervektorräume sind, bestimmen Sie die Dimension.

1. $W_1 := \{(a_n)_{n \in \mathbb{N}} \mid a_{n+1} > a_n, \ \forall\, n \in \mathbb{N}\}$.
2. $W_2 := \{(a_n)_{n \in \mathbb{N}} \mid a_{n+1} \leq a_n, \ \forall\, n \in \mathbb{N}\}$.
3. $W_3 := \{(a_n)_{n \in \mathbb{N}} \mid a_{n+1} = a_n + a_{n-1}, \ \forall\, n \in \mathbb{N}_{>0}\}$.
4. $W_4(a) := \{(a_n)_{n \in \mathbb{N}} \mid \lim_{n \to \infty} a_n = a\}$ für ein fixiertes $a \in \mathbb{R}$.

Zusatzaufgabe 5.

Sei V ein $\mathbb{K}$-Vektorraum und $B \subseteq V$ eine Teilmenge von V. Bezeichne $\iota : B \hookrightarrow V$ die kanonische Inklusion[‡], also $\iota(b) = b$ für alle $b \in B$. Man beweise, dass B eine Basis von V ist, wenn und nur wenn folgende Eigenschaft gilt:

Für alle $\mathbb{K}$-Vektorräume W und für jede Abbildung $f : B \longrightarrow W$ existiert eine eindeutige $\mathbb{K}$-lineare Abbildung $\varphi : V \longrightarrow W$ mit $\varphi \circ \iota = f$. Das heißt, sodass folgendes Diagramm kommutativ ist:

$$\begin{tikzcd} B \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\iota"'] & W \\ V \arrow[ur, "\varphi"'] & \end{tikzcd} .$$

Zusatzaufgabe 6.

Gibt es $\mathbb{R}$-lineare Abbildungen $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ mit

1. $\mathrm{Ker}(f) = \mathrm{Span}_{\mathbb{R}}\{(1,1,1), (1,2,3)\}$ und $\mathrm{Bild}(f) = \mathbb{R}^2$?
2. $\mathrm{Ker}(f) = \mathrm{Span}_{\mathbb{R}}\{(1,1,1), (1,2,3)\}$ und $\mathrm{Bild}(f) = \mathrm{Span}_{\mathbb{K}}\{(2,-7)\}$?

[‡]Da B nur eine Menge ist, hat es nicht Sinn über die $\mathbb{K}$-Linearität von ι zu sprechen. Genauso ist $f : B \longrightarrow M$ nur eine Abbildung zwischen Mengen.

Zusatzaufgabe 7.

Sei $V = \mathbb{R}[x]$ der $\mathbb{R}$-Vektorraum der Polynome in einer Variable x mit reellen Koeffizienten. Ein Polynom ist **gerade** wenn $f(x) = f(-x)$. Ein Polynom ist **ungerade** wenn $f(-x) = -f(x)$. Sei $G := \{f \in \mathbb{R}[x] \ : \ f \text{ ist gerade}\}$ und $U := \{f \in \mathbb{R}[x] \ : \ f \text{ ist ungerade}\}$.

1. Zeigen Sie, dass G und U $\mathbb{R}$-Untervektorräume von V sind.
2. Zeigen Sie, dass $V = G \oplus U$.

Zusatzaufgabe 8.

Sei $(V_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Familie von $\mathbb{R}$-Vektorräumen mir $V_n = \mathbb{R}$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Für jedes $n \in \mathbb{N}$ sei $f_n = id_{\mathbb{R}} : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ die identische Abbildung von $\mathbb{R}$ nach $\mathbb{R}$.

Seien $p_n : \prod_{n\in\mathbb{N}} V_n \longrightarrow V_n$ die kanonischen Projektionen und $i_n : V_n \longrightarrow \bigoplus_{n\in\mathbb{N}} V_n$ die kanonischen Inklusionen.

1. Bestimmen Sie die eindeutige Abbildung $f : \mathbb{R} \longrightarrow \prod_{i\in\mathbb{N}} V_n$ mit $p_n \circ f = f_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$ aus Satz 4.7.
2. Bestimmen Sie die eindeutige Abbildung $g : \bigoplus_{i\in\mathbb{N}} V_n \longrightarrow \mathbb{R}$ mit $g \circ i_n = f_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$ aus Satz 4.8.