Freie Universität Berlin
Institut für Mathematik

WiSe23/24
A. Constantinescu
J. Plock
F. Ugolini

Stand: 17. Januar 2024

Lineare Algebra 1 – Hausaufgabe 12

Abgabe via Whiteboard als `Name_LA1_H12.pdf` **bis 18:00 am Mittwoch**, den 24. Januar 2024.

Die Antworten sind stets zu begründen, inklusiv Beispiele.

Übung 1. **2 Punkte**

Seinen folgende Teilmengen des $\mathbb{R}$-Vektorraumes $\mathbb{R}^4$:

$$\begin{aligned} T &= \{(1,1,1,0),(0,1,1,1)\} \\ S &= \{(1,1,0,0),(1,0,1,0),(1,0,0,1),(0,1,1,0),(0,1,0,1),(0,0,1,1)\}. \end{aligned}$$

1. Man zeige, dass T linear unabhängig ist.
2. Man zeige, dass S ein Erzeugendensystem von $\mathbb{R}^4$ ist.
3. Man ergänze T mit Vektoren aus S zu einer Basis von V.

Aufgabe 2. **2 Punkte**

Sei W ein $\mathbb{K}$-UVR von V und seien $v_1, v_2 \in V$. Wir definieren für $i = 1, 2$

$$W_i := W + \mathrm{Span}_{\mathbb{K}} \{v_i\}.$$

Man zeige, dass wenn $v_2 \in W_1$ und $v_2 \notin W$, dann $v_1 \in W_2$.

Total: 4 Punkte

`Zusatzaufgaben auf der Rückseite`

Zusatzaufgaben

Diese Aufgaben werden weder bewertet noch müssen sie abgegeben werden.
Sie werden in den Tutorien besprochen und sind für die Klausurvorbereitung sehr empfohlen.

Zusatzaufgabe 3.

Sei $C([a,b],\mathbb{R})$ der $\mathbb{R}$-Vektorraum aller stätigen Funktionen $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$, wobei $a,b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$ und $[a,b]$ das kompakte Interval $\{x \in \mathbb{R} \ : \ a \leq x \leq b\}$ bezeichnet. Zeigen Sie, dass dieser $\mathbb{R}$-Vektorraum unendlich dimensional ist.

Zusatzaufgabe 4.

Sei $V = \mathrm{Mat}_n(\mathbb{R})$ der $\mathbb{R}$-Vektorraum der quadratischen $n \times n$ Matrizen, und sei

$$T_\lambda := \{(a_{ij}) \in V \mid \text{ mit } a_{11} + \cdots + a_{nn} = \lambda\}, \qquad \text{mit } \lambda \in \mathbb{R}.$$

1. Was für Bedingungen muss $\lambda \in \mathbb{R}$ erfüllen, damit T_λ ein $\mathbb{R}$-UVR von V ist?
2. In den Fällen in denen T_λ ein $\mathbb{R}$-UVR von V ist, bestimmen Sie $\dim_{\mathbb{R}} T_\lambda$.

Zusatzaufgabe 5.

Sei V ein $\mathbb{K}$-Vektorraum und seien B_1 und B_2 zwei Basen von V.

1. Zeigen Sie, dass $\forall\ v \in B_1,\ \exists\ w \in B_2$, sodass $(B_1 \setminus \{v\}) \cup \{w\}$ eine Basis von V ist.
2. Zeigen Sie, dass man für alle $v \in B_1$, ein $w \in B_2$ so wählen kann, dass

   $$(B_1 \setminus \{v\}) \cup \{w\} \quad \text{und} \quad (B_2 \setminus \{w\}) \cup \{v\}$$

   gleichzeitig Basen sind.

Zusatzaufgabe 6.

Beweisen Sie den Satz 4.1. (Seite 128) aus dem non-Skript, und vergleichen Sie Ihren Beweis mit dem Beweis, der im non-Skript angegeben wird.

Zusatzaufgabe** 7.

Man zeige, dass $\mathbb{R}$ als $\mathbb{Q}$-Vektorraum unendlich dimensional ist.
[Hinweis: Eine unendliche Basis kann man nicht explizit angeben. Man kann aber zeigen, dass es beliebig große linear unabhängige Teilmengen gibt. Z.B. n verschiedene Primzahlen.]