Freie Universität Berlin
Institut für Mathematik

Stand: 10. Januar 2024

WiSe23/24
A. Constantinescu
J. Plock
F. Ugolini

Lineare Algebra 1 – Hausaufgabe 11

Abgabe via Whiteboard als `Name_LA1_H11.pdf` **bis 18:00 am Mittwoch**, den 17. Januar 2024.

Die Antworten sind stets zu begründen, inklusiv Beispiele.

Aufgabe 1. **2 Punkte**

Seien U_1, U_2 und U_3 drei $\mathbb{K}$-Untervektorräume eines $\mathbb{K}$-Vektorraumes V mit der Eigenschaft $U_1 \subseteq U_3$. Man zeige, dass

$$(U_1 + U_2) \cap U_3 = U_1 + (U_2 \cap U_3).$$

Aufgabe 2. **2 Punkte**

Man bestimme eine Basis des Lösungsraumes des homogenen linearen Gleichungssystems $A \cdot \mathbf{x} = \mathbf{0}$, wobei

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathrm{Mat}_4(\mathbb{R}).$$

Total: 4 Punkte

`Zusatzaufgaben auf der Rückseite`

Zusatzaufgaben

Diese Aufgaben werden weder bewertet noch müssen sie abgegeben werden.
Sie werden in den Tutorien besprochen und sind für die Klausurvorbereitung sehr empfohlen.

Zusatzaufgabe 3.

Sei V ein $\mathbb{K}$-Vektorraum und seien v_1, v_2, v_3 drei linear unabhängige Vektoren. Sind die Vektoren $v_1 + v_2, v_1 + v_3, v_2 + v_3$ auch linear unabhängig?

Zusatzaufgabe 4.

Sei V ein $\mathbb{K}$-Vektorraum.

1. Man zeige, dass für alle $v_1, v_2 \in V$ gilt $\operatorname{Span}_{\mathbb{K}}\{v_1, v_2\} = \operatorname{Span}_{\mathbb{K}}\{v_1\} + \operatorname{Span}_{\mathbb{K}}\{v_2\}$.
2. Seien $v_1, v_2, v_3 \in V$, sodass $v_1 + v_2 + v_3 = 0$. Man zeige, dass

$$\operatorname{Span}_{\mathbb{K}}\{v_1, v_2\} = \operatorname{Span}_{\mathbb{K}}\{v_2, v_3\}.$$

Zusatzaufgabe 5.

Seien $S_1, \ldots, S_n$ verschiedene Teilmengen eines $\mathbb{K}$-Vektorraumes V. Durch welche der Symbole "$=$", "$\subseteq$" oder "$\supseteq$" kann man $\boxed{?}$ ersetzen, damit folgende Aussage wahr ist?

$$\operatorname{Span}_{\mathbb{K}}(S_1 \cap \cdots \cap S_n) \quad \boxed{?} \quad \operatorname{Span}_{\mathbb{K}} S_1 \cap \cdots \cap \operatorname{Span}_{\mathbb{K}} S_n.$$

Zusatzaufgabe 6.

Sei $f : V \longrightarrow W$ eine $\mathbb{K}$-lineare Abbildung und seien $v_1, \ldots, v_n \in V$. Man zeige oder man widerlege:

1. Wenn $\{v_1, \ldots, v_n\}$ linear unabhängig ist, dann ist $\{f(v_1), \ldots, f(v_n)\}$ linear unabhängig.
2. Wenn $\{f(v_1), \ldots, f(v_n)\}$ linear unabhängig ist, dann ist $\{v_1, \ldots, v_n\}$ linear unabhängig.
3. Wenn $\{v_1, \ldots, v_n\}$ ein Erzeugendensystem von V ist, dann ist $\{f(v_1), \ldots, f(v_n)\}$ ein Erzeugendensystem von $\operatorname{Bild} f$.
4. Wenn $\{f(v_1), \ldots, f(v_n)\}$ ein Erzeugendensystem von $\operatorname{Bild} f$ ist, dann ist $\{v_1, \ldots, v_n\}$ ein Erzeugendensystem von V.

Zusatzaufgabe** 7.

Sei $\mathcal{S}$ die Menge aller Erzeugersysteme eines $\mathbb{K}$-Vektorraumes V. Kann man den Beweis des Satzes "Jeder Vektorraum hat eine Basis." so ändern, dass man das Zornsche Lemma auf $\mathcal{S}$ anwendet um ein minimales Erzeugersystem zu finden? Das heißt, hat jede total geordnete Teilmenge in $\mathcal{S}$ eine untere Schranke in $\mathcal{S}$? †

†Hinweis:

Man sollte zeigen, dass wenn wir eine fallende Kette von Erzeugendensysteme haben, der Schnitt davon soll auch ein Erzeugendensystem sein. Offene Intervale um den Ursprung sind Erzeugendensysteme von $\mathbb{R}$ als $\mathbb{Q}$-Vektorraum.