Freie Universität Berlin
Institut für Mathematik

Stand: 21. Dezember 2023

WiSe23/24
A. Constantinescu
J. Plock
F. Ugolini

Lineare Algebra 1 – Hausaufgabe 10

Abgabe via Whiteboard als `Name_LA1_H10.pdf` **bis 18:00 am Mittwoch**, den 10. Januar 2024.

Die Antworten sind stets zu begründen, inklusiv Beispiele.

Der Pflichtteil dieser Hausaufgabe hat die Form einer Probeklausur. Die Aufgaben finden Sie auf der letzten Seite. Blättern Sie erst dann um, wenn Sie die Hinweise auf Seiten 3 und 4 gelesen haben. Auf Blatt 2 finden Sie die Zusatzaufgaben.

Total: 4 Punkte

Zusatzaufgaben

Diese Aufgaben werden weder bewertet noch müssen sie abgegeben werden.
Sie werden in den Tutorien besprochen und sind für die Klausurvorbereitung sehr empfohlen.

Zusatzaufgabe 1.

Man bestimme, ob es eine $\mathbb{K}$-Vektorraum-Struktur für folgende Abelsche Gruppen gibt.

1. $(\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}, +)$, mit der kanonischen additiven Gruppenstruktur, und $\mathbb{K} = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.
2. $(\mathbb{R}_{>0}, \cdot)$, mit Vektoraddition die Multiplikation von positiven reellen Zahlen (also "0_V"$= 1$ und "$-v$"$= \frac{1}{v}$.), und $\mathbb{K}$=$\mathbb{R}$.

Zusatzaufgabe 2.

Man bestimme ob folgende Teilmengen $\mathbb{K}$-Untervektorräume sind.

1. $U_1 = \{f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \mid f(x) = f(1-x)\} \subseteq \mathrm{Abb}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, wobei $\mathrm{Abb}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ der $\mathbb{R}$-Vektorraum aller Abbildungen von $\mathbb{R}$ nach $\mathbb{R}$.
2. $U_2 = \{f : V \longrightarrow V \mid f^2 = f\} \subseteq \mathrm{End}_{\mathbb{K}}(V)$, wobei V ein beliebiger $\mathbb{K}$-VR ist und $\mathrm{End}_{\mathbb{K}}(V)$ der $\mathbb{K}$-VR aller $\mathbb{K}$-Endomorphismen von V ist[†]. Hier bezeichnet $f^2 = f \circ f$.

Zusatzaufgabe 3.

Sei $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} \in \mathrm{Mat}_3(\mathbb{R})$ und $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ die $\mathbb{R}$-lineare Abbildung gegeben durch

$$f(\mathbf{x}) := A \cdot \mathbf{x}.$$

Hier betrachtet man $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ als Spaltenvektor. Man berechne $\mathrm{Ker}\, f$.

Zusatzaufgabe 4.

Seinen $a, b, c \in \mathbb{R}$, und $U_{a,b,c} := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid ax + by = c\}$.

1. Was für Bedingungen müssen die Parameter $a, b, c \in \mathbb{R}$ erfüllen, damit $U_{a,b,c}$ ein $\mathbb{K}$-UVR von $\mathbb{R}^2$ ist.
2. Was für Bedingungen müssen die Parameter $a, b, c \in \mathbb{R}$ und $a', b', c' \in \mathbb{R}$ erfüllen, damit $U_{a,b,c} = U_{a',b',c'}$.

Zusatzaufgabe 5.

Sei $\mathbb{K}$ ein Körper mit neutralem Element der Multiplikation $1_{\mathbb{K}}$. Zeigen Sie, dass $(-1_{\mathbb{K}})^2 = 0_{\mathbb{K}}$.

[†] Die $\mathbb{K}$-VR Operationen sind wie im Fall von $\mathrm{Abb}(X, \mathbb{K})$ von den Operationen von V induziert.

NICHT UMBLÄTTERN OHNE DIE ANWEISUNG ZU LESEN

ANWEISUNG

Diese Hausaufgabe hat die Form einer Probeklausur. Das heißt, dass die Aufgabenstellung und die Punkteverteilung ähnlich einer Klausur sind. Die Klausur wird jedoch aus drei Aufgaben bestehen, nicht aus einer einzigen wie die Probeklausur.

Der Inhalt und der Schwierigkeitsgrad können unterschiedlich von der Klausur sein.

Um den Umständen der Klausur näher zu kommen, wird empfohlen, die Aufgaben alleine, ohne Hilfsmittel und innerhalb von 35 (maximal 45) Minuten zu bearbeiten.

Damit kein Nachteil für die aktive Teilnahme an der Veranstaltung durch Erhöhung der gesamten Punktzahl entsteht, werden auch für diese Hausaufgabe höchstens 4 Punkte eingetragen. Sie können aber für die vorliegende Aufgabe n Punkte verdienen, mit $0 \leqslant n \leqslant 20$. Es wird dann $\min\{n, 4\}$ für die Hausaufgabe eingetragen. Das sollte Sie auch ermutigen, die Hausaufgabe unter Klausur-ähnlichen Bedingungen zu bearbeiten.

Sie werden auch gebeten Ihre Vorbereitung und Ihre Leistung selber zu schätzen, indem Sie vor und nach dem Bearbeiten der Probeklausur eine erwartete Punktzahl angeben.

Das Thema der Probeklausur ist Matrizen, lineare Gleichungssysteme und Vektorräume (das, was in der Vorlesung bereits behandelt wurde).

Stehen Sie also allein, ohne Hilfsmittel und konzentriert vor einem leeren Lösungsheft? Dann können Sie umblättern.

NICHT UMBLÄTTERN OHNE DIE ANWEISUNG ZU LESEN

Probeklausur zu Mathematik Entdecken 1

16.Dezember 2021

Zeit: ~~90~~ 30 Minuten **Höchstpunktzahl:** ~~60~~ 20 Punkte **100%:** ~~48~~ 16[†] Punkte

Name:
Matrikelnummer:

Aufgabe	1	2	3	gesamt	Note
Punkte		X	X		X

Das Punkten-Noten Schema ist wie in der Klausur.

P	$< \mathbf{24}$	24...	27...	30...	33...	36...	39...	42...	44...	46...	$\mathbf{48} \leq$
N	**5.0**	4.0	3.7	3.3	3.0	2.7	2.3	2.0	1.7	1.3	**1.0**

Hinweise

(a) Hilfsmittel sind nicht zugelassen. Insbesondere sind **elektronische Hilfsmittel** (zum Beispiel Suchmaschienen, Foren, Matlab, Twitter, Whatsapp, Signal), Mitschriften, Bücher, das non-Skript und die Hilfe anderer Personen **untersagt**.

(b) Es gibt ~~drei~~ 1 Aufgabe~~n~~ und pro Aufgabe gibt es 20 Punkte.

(c) Die Antworten sind stets zu begründen, inklusiv Beispiele.

(d) Sätze aus der Vorlesung können verwendet werden, aber die Aussage muss deutlich erklärt sein.

(e) Erhoffte Punktzahl ohne die Aufgabenstellung zu sehen ☐

(f) Geschätzte Punktzahl nach dem Bearbeiten der Probeklausur ☐[‡]

Prüfer: Alexandru Constantinescu
FU Berlin

Wintersemester 2023/24

[†] Die 16 Punkte entsprechen einer 1.0 in dieser Simulation. Für die Hausaufgabe werden höchstens 4 Punkte eingetragen

[‡] Wenn Sie dieses Blatt nicht drucken können, geben Sie bitte die erhoffte und geschätzte Punktzahl auf dem Antwortblatt an.

Freie Universität Berlin
Institut für Mathematik

WiSe23/24
Prüfer: A. Constantinescu

Lineare Algebra 1 - ~~Probe~~lklausur

20.12.2023

Aufgabenstellung

Zeit: ~~90~~ 30 Minuten **Maximale Punktzahl:** ~~60~~ 20 Punkte **100%:** ~~48~~ 16 Punkte

---

Aufgabe 1 **20 Punkte**

a. (2 P) Geben Sie die Definition von linearer Abbildung an.

b. (3 P) Ziegen Sie, dass der Kern einer linearer Abbildung ein Untervektorraum ist.

c. (5 P) Geben Sie den Kern der linearen Abbildung $f_A : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ in parametrischer Form an, wobei

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathrm{Mat}_3(\mathbb{R})$$

und $f_A(\mathbf{x}) = A \cdot \mathbf{x}$.

Sei $\mathbb{K}$ ein beliebiger Körper und sei M die Menge

$$M = \left\{ A \in \mathrm{Mat}_2(\mathbb{K}) \ : \ \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot A = A \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right\}.$$

d. (4 P) Zeigen Sie, dass M ein $\mathbb{K}$-Untervektorraum von $\mathrm{Mat}_2(\mathbb{K})$ ist.

e. (6 P) Zeigen Sie, dass folgende Teilmenge von M eine Gruppe zusammen mit der Matrix Multiplikation bildet:

$$G = M \cap \left\{ \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} \in \mathrm{Mat}_2(\mathbb{K}) \ : \ x \neq \pm y \right\}.$$