Freie Universität Berlin
Institut für Mathematik

Stand: 13. Dezember 2023

WiSe23/24
A. Constantinescu
J. Plock
F. Ugolini

Lineare Algebra 1 – Hausaufgabe 9

Abgabe via Whiteboard als `Name_LA1_H09.pdf` **bis 18:00 am Mittwoch**, den 20. Dezember 2023.

Die Antworten sind stets zu begründen, inklusiv Beispiele.

Aufgabe 1. **2 Punkte**

Geben Sie jeweils ein Beispiel einer $(3\times 3)-$Matrix, ohne triviale Einträge, die Zeilenstufenrang 1, 2, bezeihungsweise 3 hat.

Aufgabe 2. **2 Punkte**

Für jede positive ganze Zahl $n \geqslant 2$ defienieren wir die Matrix $T_n \in \mathrm{Mat}_n(\mathbb{Q})$ als

$$T_n = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ n+1 & n+2 & \dots & 2n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ (n-1)n+1 & (n-1)n+2 & \dots & n^2 \end{pmatrix}$$

1. Berechnen Sie den ZS-Rang von T_n.[†]
2. Geben Sie Lösungsmenge des homogenen LGS$(T_n \,|\, 0)$ in parametrischer Form an.

Eine richtige und vollständige Lösung im Fall $n = 3$ wird mit 1 Punkt bewertet.

Total: 4 Punkte

`Zusatzaufgaben auf der Rückseite`

[†]Hinweis: Finden Sie eine Relation zwischen 3 konsekutive Zeilen.

Zusatzaufgaben

Diese Aufgaben werden weder bewertet noch müssen sie abgegeben werden.
Sie werden in den Tutorien besprochen und sind für die Klausurvorbereitung sehr empfohlen.

Zusatzaufgabe 3.

Man berechne den Rang folgender Matrizen, und wenn diese invertierbar sind, auch die Inverse:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 2 \\ 3 & -1 & 0 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Zusatzaufgabe 4.

Zeigen Sie, dass wenn ein homogenes lineares Gleichungssystem mit reellen Koeffizienten eine nicht-triviale komplexe Lösung hat, dann hat es auch eine nicht-triviale reelle Lösung.

Zusatzaufgabe 5.

Sei $C = \{\begin{pmatrix} \cos\alpha \\ \sin\alpha \end{pmatrix} \;:\; \alpha \in [0, 2\pi)\} \subset \mathbb{R}^2$ der Einheitskreis, und sei für jedes $\theta \in [0, 2\pi)$ die Matrix

$$\rho_\theta = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \in \mathrm{Mat}_2(\mathbb{R}).$$

1. Beschreiben Sie "geometrisch" die Abbildung $f_\theta : C \longrightarrow C$ mit
$$f_\theta(\begin{pmatrix} \cos\alpha \\ \sin\alpha \end{pmatrix}) := \rho_\theta \cdot \begin{pmatrix} \cos\alpha \\ \sin\alpha \end{pmatrix}.$$
2. Berechnen Sie die Inverse der Matrix $\rho_{\pi/3}$.
3. Berechnen Sie die Inverse der Matrix ρ_θ für ein beliebiges $\theta \in [0, 2\pi)$.
4. Berechnen Sie die RZSF von ρ_θ für ein beliebiges $\theta \in [0, 2\pi)$.

Zusatzaufgabe 6.

Seien $A = \begin{pmatrix} a & b \end{pmatrix} \in \mathrm{Mat}_{1\times 2}(\mathbb{R})$ und $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathrm{Mat}_{2\times 1}(\mathbb{R})$ zwei nicht-triviale Matrizen. Zeigen Sie, dass der Rang von $X \cdot A$ immer 1 ist.

Zusatzaufgabe* 7.

Zeigen Sie, dass eine quadratische Matrix genau dann ZS-Rang 1 hat, wenn diese Produkt einer Spalten-Matrix mit einer Zeilen-Matrix ist.