Freie Universität Berlin
Institut für Mathematik

Stand: 6. Dezember 2023

WiSe23/24
A. Constantinescu
J. Plock
F. Ugolini

Lineare Algebra 1 – Hausaufgabe 8

Abgabe via Whiteboard als `Name_LA1_H08.pdf` **bis 18:00 am Mittwoch**, den 13. Dezember 2023.

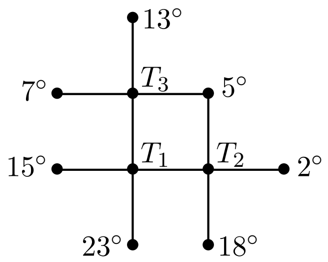
Die Antworten sind stets zu begründen, inklusiv Beispiele.

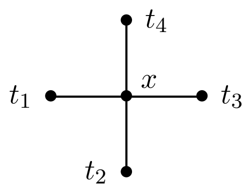
Aufgabe 1. **2 Punkte**

Lesen Sie den Abschnitt **2.2.2 Gaußscher Algorithmus** und den Abschnitt **2.2.3 RZSF und die Lösungsmenge eines LGS** im non-Skript. Schreiben Sie dann den Gaußschen Algorithmus in Pseudocode auf.

In der Version vom 5.Dezember 2023 fangen diese Abschnitte auf Seite 100, bzw. 103 an.

Aufgabe 2. **2 Punkte**





$$x = \frac{1}{4} \cdot t_1 + \frac{1}{4} \cdot t_2 + \frac{1}{4} \cdot t_3 + \frac{1}{4} \cdot t_4.$$

Die Temperatur x an einem Punkt $\bullet$ im obigen Gitter $\mathcal{G}$ ist der Durchschnitt der Temperaturen an den Nachbarpunkten.

1. Man bestimme die Temperaturen T_1, T_2, T_3 im gegebenen Gitter $\mathcal{G}$.
2. Man zeige, dass für das Gitter $\mathcal{G}$ jede Wahl von Temperaturen am Rand die Temperaturen T_1, T_2 und T_3 eindeutig bestimmt.

Total: 4 Punkte

Zusatzaufgaben auf der Rückseite

Zusatzaufgaben

Diese Aufgaben werden weder bewertet noch müssen sie abgegeben werden.
Sie werden in den Tutorien besprochen und sind für die Klausurvorbereitung sehr empfohlen.

Zusatzaufgabe 3.

Man zeige, dass für alle $A \in \mathrm{Mat}_{m\times n}(\mathbb{K})$ und die Lösungsmenge $\mathcal{L}(A,0) = \{\boldsymbol{\alpha} \in \mathbb{K}^n \mid A \cdot \boldsymbol{\alpha}^T = 0\}$ gilt:

1. $0 \in \mathcal{L}(A,0)$.
2. Wenn $\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta} \in \mathcal{L}(A,0)$, dann $\boldsymbol{\alpha} + \boldsymbol{\beta} \in \mathcal{L}(A,0)$.
3. Wenn $\boldsymbol{\alpha} \in \mathcal{L}(A,0)$ und $\lambda \in \mathbb{K}$, dann $\lambda \cdot \boldsymbol{\alpha} \in \mathcal{L}(A,0)$.

* Wir identifizieren $\mathbb{K}^n$ mit $\mathrm{Mat}_{1\times n}(\mathbb{K})$ durch die Abbildung $(\alpha_1, \dots, \alpha_n) \mapsto \begin{pmatrix} \alpha_1 & \dots & \alpha_n \end{pmatrix}$.

Zusatzaufgabe 4.

Man bestimme $\mathcal{L}(A,0)$, $\mathcal{L}(A,\mathbf{b})$ und $\mathcal{L}(A,\mathbf{b}')$ für folgende Matrizen mit Einträgen in $\mathbb{Q}$:

$$A = \begin{pmatrix} -2 & -4 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & -3 & 2 \\ 3 & 6 & 3 & -5 & 12 \end{pmatrix} \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} -4 \\ 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \mathbf{b}' = \begin{pmatrix} -4 \\ -1 \\ -5 \\ -3 \end{pmatrix}.$$

Zusatzaufgabe 5.

Sei $A \cdot \mathbf{x}^T = \mathbf{b}$ ein lineares Gleichungssystem mit drei Gleichungen und drei Unbekannten. Die Lösungsmenge des LGS ist:

$$\mathcal{L}(A|\mathbf{b}) = \{(4,0,0) + t_1(2,1,0) + t_2(5,0,1) \mid t_1, t_2 \in \mathbb{R}\} \subseteq \mathbb{R}^3.$$

1. Man finde $(R|\mathbf{d})$ = die reduzierte Zeilenstufenform von $(A|\mathbf{b})$.

Das Gaußsche Eliminationsverfahren, das die reduzierte Zeilenstufenform von $(A|\mathbf{b})$ ergibt, hat nur zwei elementare Zeilenumformungen:

- 3 mal die erste Zeile wird von der zweiten Zeile abgezogen;
- 5 mal die erste Zeile wird von der dritten Zeile abgezogen.

2. Man finde die invertierbare Matrix B, sodass $B \cdot A = R$, und man bestimme A.

Zusatzaufgabe 6.

Sei $A = (a_{kl}) \in \mathrm{Mat}_4(\mathbb{C})$ die Matrix mit Einträgen

$$a_{kl} = i^{k(l-1)}.$$

wobei $i^2 = -1$. Ist A invertierbar? Falls Ja, man bestimme die Inverse von A.

Zusatzaufgabe 7.

1. Für jedes Paar $(m, n) \in \mathbb{N}^2$, mit $2 \leqslant m \leqslant n$, man gebe ein Beispiel einer Matrix in $\mathrm{Mat}_{m\times n}(\mathbb{R})$, die genau m Einträge gleich mit 1 hat und $m \cdot (n-1)$ Einträge gleich mit 0 hat, und die nicht in RZSF ist.
2. Man bestimme alle mögliche reduzierte Zeilenstufenformen (d.h. Anzahl und Position der Stufen) für 2×3 Matrizen.
3. Man zeige, dass alle invertierbare $n \times n$ Matrizen, dieselbe RZSF haben.