Freie Universität Berlin
Institut für Mathematik

Stand: 29. November 2023

WiSe23/24
A. Constantinescu
J. Plock
F. Ugolini

Lineare Algebra 1 – Hausaufgabe 7

Abgabe via Whiteboard als `Name_LA1_H07.pdf` **bis 18:00 am Mittwoch**, den 6. Dezember 2023.

Die Antworten sind stets zu begründen, inklusiv Beispiele.

Aufgabe 1. **2 Punkte**

Wir bezeichnen mit $\mathrm{GL}_2(\mathbb{R}) := \{A \in \mathrm{Mat}_{2\times 2}(\mathbb{R}) \ : \ \exists\, A^{-1} \in \mathrm{Mat}_{2\times 2}(\mathbb{R}) \text{ mit } A \cdot A^{-1} = I_2\}$ die Gruppe aller (multiplikativ) invertierbaren 2×2 Matrizen mit reellen Einträge. Man überprüfe, dass folgende Zuordnungen injektive Gruppenhomomorphismen definieren.

(**Hinweis:** Sie müssen also auch zeigen, dass die Zuordnung eine Abbildung definiert und auch die Gruppenstruktur des Definitionsbereich erkennen.)

1. $a \longmapsto \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ für alle $a \in \mathbb{R}$.
2. $t \longmapsto \begin{pmatrix} t & 0 \\ 0 & t \end{pmatrix}$ für alle $t \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.
3. $a + ib \longmapsto \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$ für alle $a + ib \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$.

Aufgabe 2. **2 Punkte**

Sei $n \in \mathbb{N}_{>0}$. Für jedes Paar $(k,l) \in \{1,\dots,n\} \times \{1,\dots,n\}$ sei $E_{kl} = (e_{ij}) \in \mathrm{Mat}_n(\mathbb{R})$ die Matrix mit

$$e_{ij} = \begin{cases} 0 & \text{, wenn } (i,j) \neq (k,l) \\ 1 & \text{, wenn } (i,j) = (k,l) \end{cases}$$

1. Man berechne für $n = 3$ die Produkte $E_{1,2} \cdot E_{1,3}$ und $E_{1,2} \cdot E_{2,3}$.
2. Man berechne das Produkt $E_{kl} \cdot E_{rs}$ für beliebige $(k,l), (r,s) \in \{1,\dots,n\} \times \{1,\dots,n\}$.

Total: 4 Punkte

Zusatzaufgaben auf der Rückseite

Zusatzaufgaben

Diese Aufgaben werden weder bewertet noch müssen sie abgegeben werden.
Sie werden in den Tutorien besprochen und sind für die Klausurvorbereitung sehr empfohlen.

Zusatzaufgabe 3.

Seien $m, n, p \in \mathbb{N}_{>0}$, sei $\mathbb{K}$ ein Körper, und seien $A \in \mathrm{Mat}_{m\times n}(\mathbb{K})$ und $B \in \mathrm{Mat}_{n\times p}(\mathbb{K})$ zwei Matrizen. Man bezeichnet mit A^T die Transponierte Matrix. Man zeige, dass

1. $(A + B)^T = A^T + B^T$.
2. $(\lambda \cdot A)^T = \lambda \cdot A^T$, für alle $\lambda \in \mathbb{K}$.
3. $(A \cdot B)^T = B^T \cdot A^T$.
4. wenn A invertierbar ist, dann $(A^{-1})^T = (A^T)^{-1}$.

Zusatzaufgabe 4.

Für $A \in \mathrm{Mat}_n(\mathbb{K})$ bezeichnen wir mit $A^0 := I_n$ und definieren für jedes $n \in \mathbb{N}_{>0}$ die n-te Potenz von A als $A^n := A^{n-1} \cdot A$. Berechnen Sie A^{17} für $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathrm{Mat}_4(\mathbb{C})$.

Zusatzaufgabe 5.

Alle Matrizen in dieser Aufgabe sind mit reellen Einträgen. Man berechne AB und BA für

1. $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 3 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -8 & -4 \\ 9 & 5 \\ -3 & -2 \end{pmatrix}$. **2.** $A = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 6 & -4 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$.

Sind folgende Matrizen invertierbar? Falls ja, dann berechnen Sie die Inverse:

3. $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$ **4.** $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ **5.** $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$.

Zusatzaufgabe 6.

Sei $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} \in \mathrm{Mat}_3(\mathbb{Z}/10\mathbb{Z})$.

1. Wie viele Elemente hat die Menge $\{A^n \mid n \geq 1\}$?
2. Gibt es ein $k \geq 2$ sodass $A^k = A$?
3. Ist A invertierbar?

Zusatzaufgabe 7.

Für komplexe Zahlen $a, b \in \mathbb{C}$ gilt immer $a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$.

1. Schreiben Sie den Beweis der obigen Aussage ausführlich auf.
2. Welcher Schritt im obigen Beweis würde für Matrizen nicht mehr unbedingt gelten?
3. Man zeige, dass $A^2 - B^2 = (A-B)(A+B)$ nicht für alle $A, B \in \mathrm{Mat}_n(\mathbb{C})$ gilt.