Freie Universität Berlin
Institut für Mathematik

WiSe23/24

A. Constantinescu
J. Plock
F. Ugolini

Stand: 22. November 2023

Lineare Algebra 1 – Hausaufgabe 6

Abgabe via Whiteboard als `Name_LA1_H06.pdf` **bis 18:00 am Mittwoch**, den 29. November 2023.

Die Antworten sind stets zu begründen, inklusiv Beispiele.

Aufgabe 1. — 2 Punkte

1. Man zeige, dass die Menge der positiven reellen Zahlen $\mathbb{R}_{>0} = \{a \in \mathbb{R} \ : \ a > 0\}$ eine Untergruppe von $(\mathbb{R} \setminus \{0\}, \cdot)$ ist.
2. Man zeige, dass die Gruppe $(\mathbb{R}, +)$ und die Gruppe $(\mathbb{R}_{>0}, \cdot)$ isomorph sind.
3. Sind die Gruppen $(\mathbb{R}, +)$ und $(\mathbb{R} \setminus \{0\}, \cdot)$ isomorph? †

Aufgabe 2. — 2 Punkte

Ein **Integritätsbereich** ist ein Ring R mit der Eigenschaft, dass

$$a \cdot b = 0 \Rightarrow a = 0 \text{ oder } b = 0.$$

Zum Beispiel, $\mathbb{Z}$ ist ein Integritätsbereich aber $\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$ ist nicht ein Integritätsbereich, weil $[2] \cdot [3] = [0]$ und $[2] \neq [0]$ und $[3] \neq [0]$.

Man zeige, dass ein endlicher Integritätsbereich ein Körper ist.

Leseaufgabe 3. — ~2 Stunden

Lesen Sie den Abschnitt *Normalteiler und die Faktorgruppe* und den Abschnitt *Endliche Gruppen* im non-Skript.

In der Version vom 15.November 2023 fangen diese auf Seite 61, beziehungsweise 63 an.
In der Version vom 22.November 2023 fangen diese auf Seite 77, beziehungsweise 80 an.

Total: 4 Punkte

`Zusatzaufgaben auf der Rückseite`

† Hinweis: Gibt es Elementen „endlicher Ordnung" in eine der Gruppen?

Zusatzaufgaben

Diese Aufgaben werden weder bewertet noch müssen sie abgegeben werden.
Sie werden in den Tutorien besprochen und sind für die Klausurvorbereitung sehr empfohlen.

Zusatzaufgabe 4.

Sei $M \neq \emptyset$ eine endliche Teilmenge einer Gruppe $(G, *)$. Man zeige, dass M genau dann eine Untergruppe von G ist, wenn $x, y \in M \Rightarrow x * y \in M$.

Zusatzaufgabe 5.

Welche der folgenden Abbildungen sind Gruppenhomomorphismen? Wenn Ja, sind sie Gruppenisomorphismen?

1. $f : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z} \quad f(x) = 2x$.
2. $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \quad f(x) = 2x$.
3. $f : U(\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}) \longrightarrow U(\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}) \quad f(x) = x^2$.
4. $f : U(\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}) \longrightarrow U(\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}) \quad f(x) = x^3$.

Wobei $U(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}) := \big\{[x] \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \ : \ [x] \text{ ist invertierbar bezüglich der Multiplikation } \bmod n\big\}$.

Zusatzaufgabe 6.

Sei $(R, +, \cdot)$ ein Ring. Man zeige, dass

1. $0 \cdot a = 0 \ \ \forall\, a \in R$.
2. $-a = (-1) \cdot a \ \ \forall\, a \in R$.
3. $(-a) \cdot b = -(a \cdot b) \ \ \forall\, a, b \in R$.

Zusatzaufgabe 7.

1. Man *berechne* die komplexen Zahlen $\frac{1-i}{1+i}$, $\sqrt{i}$, und $\frac{1}{\sqrt{i}}$.

   (*Berechnen* heißt hier, als $a + ib$ mit $a, b \in \mathbb{R}$ darstellen. Für $\sqrt{i}$ sucht man alle $z \in \mathbb{C}$ mit $z^2 = i$.)
2. Man beschreibe die jeweiligen Lösungsmengen der Gleichung $x^2 + y^2 = 0$ über $\mathbb{R}$ und über $\mathbb{C}$. (Das heißt, man finde alle Paare $(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, bzw. in $\mathbb{C} \times \mathbb{C}$, sodass $x^2 + y^2 = 0$.)
3. Man bestimme die jeweiligen Lösungsmengen der Gleichung $x^2 + y^2 = 0$ über $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ und über $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$. Welche Parallelen gibt es zu Punkt 2?

Zusatzaufgabe 8.

Sei $\mathbb{Z}[i] := \{a + ib \in \mathbb{C} \mid a, b \in \mathbb{Z}\}$ zusammen mit der Addition und der Multiplikation auf $\mathbb{C}$. Das Tripel $(\mathbb{Z}[i], +, \cdot)$ heiß der **Ring der gaußschen Zahlen**.

1. Man bestimme alle Einheiten in $\mathbb{Z}[i]$. (Eine Einheit in einem Ring ist ein Element, dass invertierbar bezüglich der Multiplikation ist.)
2. Man bestimme alle $x, y \in \mathbb{Z}[i]$, sodass $x \cdot y = 5$.

Zusatzaufgabe* 9.

1. Sind die additive Gruppen $\mathbb{Z}$ und $\mathbb{Q}$ isomorph?
2. Sind die Gruppen $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ und $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ isomorph?
3. Sind $\big(U(\mathbb{Z}/14\mathbb{Z}), \cdot\big)$ und $\big(U(\mathbb{Z}/18\mathbb{Z}), \cdot\big)$ isomorph?

Zusatzaufgabe* 10.

Man bestimme alle endliche Teilmengen von $\mathbb{C}$ die abgeschlossen bezüglich der Multiplikation sind. Das heißt, man beschreibe alle $U = \{a_1, \ldots, a_n\} \subseteq \mathbb{C}$ mit der Eigenschaft, dass

$$a_i, a_j \in U \Rightarrow a_i a_j \in U.$$