Freie Universität Berlin
Institut für Mathematik

WiSe23/24
A. Constantinescu
J. Plock
F. Ugolini

Stand: 15. November 2023

Lineare Algebra 1 – Hausaufgabe 5

Abgabe via Whiteboard als `Name_LA1_H05.pdf` **bis 18:00 am Mittwoch**, den 22. November 2023.

Die Antworten sind stets zu begründen, inklusiv Beispiele.

Aufgabe 1. **2 Punkte**

1. Man finde alle Paare $([x],[y]) \in (\mathbb{Z}/12\mathbb{Z})^2$, die beide folgende Gleichungen erfüllen:

$$\begin{cases} [6][x]+[3][y] &= [9] \\ [5][x]+[10][y] &= [17] \end{cases}$$

2. Man bestimme alle $n \in \mathbb{N}$, sodass $[x]$ und $[y]$ in $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$, die beide folgende Gleichungen erfüllen, existieren.

$$\begin{cases} [x]+[y] &= [2] \\ [2x]-[3y] &= [3] \end{cases}$$

Aufgabe 2. **2 Punkte**

Sei M eine nicht leere Menge und sei $\mathbb{R}$ die Menge der reellen Zahlen. Sei

$$\mathrm{Abb}(M,\mathbb{R}) := \{f : M \longrightarrow \mathbb{R} \ : \ f = \text{ Abbildung}\},$$

die Menge aller Abbildungen von M nach $\mathbb{R}$. Auf $\mathrm{Abb}(M,\mathbb{R})$ definiert man die Verknüpfung $\star : \mathrm{Abb}(M,\mathbb{R}) \times \mathrm{Abb}(M,\mathbb{R}) \longrightarrow \mathrm{Abb}(M,\mathbb{R})$ durch

$$(f \star g)(x) \ := \ f(x)\cdot g(x) \quad \forall\, x \in M,$$

wobei "·" die Multiplikation der reellen Zahlen bezeichnet.

1. Man bestimme das neutrale Element für $\star$.
2. Man beschriebe die invertierbare Elemente aus $\mathrm{Abb}(M,\mathbb{R})$ bezüglich $\star$.

Total: 4 Punkte

`Zusatzaufgaben auf der Rückseite`

Zusatzaufgaben

Diese Aufgaben werden weder bewertet noch müssen sie abgegeben werden.
Sie werden in den Tutorien besprochen und sind für die Klausurvorbereitung sehr empfohlen.

Zusatzaufgabe 3.

Sei $(G, *)$ eine Gruppe und $M \subseteq G$ eine Teilmenge der Menge G. Man zeige, dass die Menge $Z(M) := \{g \in G \ : \ g * m = m * g \ \forall \ m \in M\}$ eine Untergruppe von G ist.

(Wenn $M = G$, dann heißt $Z(G)$ das **Zentrum** der Gruppe G.)

Zusatzaufgabe 4.

Welche der folgenden Zahlen ist durch 101 teilbar?

1. $100^2 - 1$.
2. $99^{100} + 1$.
3. $2^{100} - 1$.
4. $49^{198} - 52^{198}$.

Zusatzaufgabe 5.

Man zeige, dass $1 + 2^2 + 3^{3^3}$ nicht das Quadrat einer natürlichen Zahl ist.

(**Hinweis:** $3^{3^3} = 3^{(3^3)} = 3^{27}$.)

(Erste Phase der Mathe Olympiade, 5.Klasse, Bukarest 1998)

Zusatzaufgabe 6.

Man beweise oder man widerlege die folgenden Aussagen:

1. Für alle $x, y \in \mathbb{Z}$ und für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt:

$$\textit{Wenn} \quad xy \equiv 0 \bmod n, \quad \textit{dann} \quad x \equiv 0 \bmod n \quad \textit{oder} \quad y \equiv 0 \bmod n.$$

2. Für alle natürliche Zahlen $n > 3$ und für alle $x \in \mathbb{Z}$ gilt:

$$\textit{Wenn} \quad x^2 \equiv 4 \bmod n, \quad \textit{dann} \quad x \equiv 2 \bmod n \quad \textit{oder} \quad x \equiv -2 \bmod n.$$

3. Es gibt eine einzige natürliche Zahl $n > 1$, sodass für alle $x \in \mathbb{Z}$ gilt:

$$\textit{Wenn} \quad x^2 \equiv 4 \bmod n, \quad \textit{dann} \quad x \equiv 2 \bmod n.$$

Zusatzaufgabe 7.

Der 13. Oktober 2023 war ein Freitag.

1. Was für ein Wochentag wird der 13. Oktober 3032 sein[§]
2. Zeigen Sie, dass jedes Jahr mindestens einen "Freitag der 13." hat.
3. Wie viele "Freitag der 13." kann es maximal in einem Jahr geben?

Zusatzaufgabe* 8.

Eine natürliche Zahl n schreiben wir im dekadischen System mit Hilfe der Ziffern $0, \dots, 9$. Wir schreiben dafür $n = \overline{a_k \dots a_1 a_0}$ mit $a_i \in \{0, \dots, 9\}$. Das heißt, dass $n = \sum_{i=0}^{k} a_i \cdot 10^i$. Zum Beispiel, wenn $k = 2$, $a_2 = 4$, $a_1 = 2$ und $a_0 = 0$ dann ist $\overline{a_2 a_1 a_0} = 420$.
Die **Quersumme** von $n = \overline{a_k \dots a_1 a_0}$ ist

$$Q(n) := \sum_{i=0}^{n} a_i.$$

1. Man zeige, dass $9 \mid n \iff n \mid Q(n)$.

*** 2. Was ist die Quersumme der Quersumme der Quersumme von 4444^{4444}? [†]

[§] Hinweis: Papst Gregor XIII.

[†] Hinweis: Rechnen Sie Modulo 9, und geben Sie auch eine obere Schranke für $Q(Q(4444^{4444}))$ an.