Freie Universität Berlin
Institut für Mathematik

Stand: 8. November 2023

WiSe23/24
A. Constantinescu
J. Plock
F. Ugolini

Lineare Algebra 1 – Hausaufgabe 4

Abgabe via Whiteboard als `Name_LA1_H03.pdf` **bis 18:00 am Mittwoch**, den 15. November 2023.

Die Antworten sind stets zu begründen, inklusiv Beispiele.

Aufgabe 1. **2 Punkte**

Sei $\sim$ die Relation of $\mathbb{R}^2$ definiert durch $(a,b) \sim (c,d) \Leftrightarrow \exists t \in \mathbb{R}$ mit $(a-c, b-d) = (t,t)$.

1. Man zeige, dass $(4,6) \sim (2,4)$.
2. Man zeige, dass $(4,6) \not\sim (4,2)$.
3. Man beweise, dass $\sim$ eine Äquivalenzrelation ist.
4. Man beschreibe die Äquivalenzklasse von $(4,6)$ als Lösungsmenge einer Gleichung.
   (Z.B. eine Parabel kann man als $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \;:\; y - x^2 = 0\}$ beschreiben.)
5. Man beschreibe die Äquivalenzklasse von $(4,6)$ parametrisch.
   (Z.B. eine Parabel kann man als $\{(t,t^2) \in \mathbb{R}^2 \;:\; t \in \mathbb{R}\}$ beschreiben.)
6. Man gebe eine geometrische Beschreibung der Äquivalenzklassen und zeichnen Sie eine Skizze dafür.
7. Man finde ein Repräsentantensystem für $\sim$.

Aufgabe 2. **2 Punkte**

Es sei $\sim$ eine Äquivalenzrelation auf $\mathbb{Z}$, die verträglich mit der Addition ist. Das heißt, dass

$$\forall a,b,x,y \in \mathbb{Z} \text{ gilt:} \qquad a \sim x \text{ und } b \sim y \quad \Rightarrow \quad a+b \sim x+y \tag{3}$$

1. Man zeige, dass $[0]_\sim$ eine Untergruppe von $(\mathbb{Z},+)$ ist.
2. Man zeige, dass
$$a \sim b \quad \Leftrightarrow \quad a-b \in [0]_\sim.$$

Hinweis: Sie brauchen für Teil 1 nur die Axiome aus der Definition von Untergruppe (siehe das non-Skript) für $[0]_\sim \subseteq \mathbb{Z}$ zu überprüfen.

Total: 4 Punkte

`Zusatzaufgaben auf der Rückseite`

Zusatzaufgaben

Diese Aufgaben werden weder bewertet noch müssen sie abgegeben werden.
Sie werden in den Tutorien besprochen und sind für die Klausurvorbereitung sehr empfohlen.

Zusatzaufgabe 3.

Sei $M \neq \emptyset$ eine Menge und seien $\sim_1$ und $\sim_2$ zwei Äquivalenzrelationen auf M. Man definiert zwei neue Relationen durch:

$$\begin{aligned} a \sim_{1\cup 2} b \quad &\Leftrightarrow \quad a \sim_1 b \ \text{ oder } a \sim_2 b \\ a \sim_{1\cap 2} b \quad &\Leftrightarrow \quad a \sim_1 b \ \text{ und } a \sim_2 b. \end{aligned}$$

Welche der beiden neu-definierten Relationen ist immer eine Äquivalenzrelation?

Zusatzaufgabe 4.

Seien $a, b \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie, dass

$$a|b \Leftrightarrow \{d \in \mathbb{N} \ : \ d|a\} \subseteq \{d \in \mathbb{N} \ : \ d|b\}$$

Zusatzaufgabe 5.

Sei $\sim$ eine Relation auf der Menge $M \neq \emptyset$.

1. Man betrachte den "Beweis" der folgenden Aussage und man finde den Fehler:

   Aussage: *Wenn $\sim$ symmetrisch und transitiv ist, dann ist $\sim$ auch reflexiv.*

   "Beweis": *Sei $a \in M$ und sei $b \in M$, sodass $a \sim b$. Dann, aus der Symmetrie folgt auch $b \sim a$. Aus der Transitivität folgt aus $a \sim b$ und $b \sim a$, dass $a \sim a$. Also ist $\sim$ reflexiv.*
2. Man gebe ein Beispiel einer Relation die symmetrisch und transitiv ist, die aber nicht reflexiv ist.

Zusatzaufgabe 6.

Sei $n \in \mathbb{N}$, mit $n \geq 1$. Sei $U_n = \{z \in \mathbb{C} \mid z^n = 1\}$. Zeigen Sie, dass U_n mit der Multiplikation der komplexen Zahlen eine Gruppe bildet.

Zusatzaufgabe 7.

Sei $|\mathbb{Z}| := \mathbb{Z}/\sim$ mit $z \sim w \Leftrightarrow |z| = |w|$. Analog sei $|\mathbb{Q}^\times| := \mathbb{Q} \setminus \{0\}/\sim$.

1. Man zeige, dass $\sim$ eine Äquivalenzrelation auf $\mathbb{Z}$ definiert.
2. Definiert $|z| + |w| := |z + w|$ eine Gruppenstruktur auf $|\mathbb{Z}|$?
3. Definiert $|q| \cdot |p| := |qp|$ eine Gruppenstruktur auf $|\mathbb{Q}^\times|$?