Freie Universität Berlin
Institut für Mathematik

Stand: 1. November 2023

WiSe23/24
A. Constantinescu
J. Plock
F. Ugolini

Lineare Algebra 1 – Hausaufgabe 3

Abgabe via Whiteboard als `Name_LA1_H03.pdf` **bis 18:00 am Mittwoch**, den 8. November 2023.

Die Antworten sind stets zu begründen, inklusiv Beispiele.

Aufgabe 1. **2 Punkte**

Man zeige oder man widerlege:

Für alle Mengen A und für alle Familien von Mengen $(B_i)_{i\in I}$ gilt:

$$A \setminus \left(\bigcup_{i\in I} B_i \right) = \bigcap_{i\in I} (A \setminus B_i).$$

Aufgabe 2. **2 Punkte**

Sei $f : A \longrightarrow B$ eine Abbildung und seien $X, Y \subseteq A$ zwei Teilmengen.

1. Man zeige, dass $f(X \cup Y) = f(X) \cup f(Y)$.
2. Man zeige, dass $f(X \cap Y) \subseteq f(X) \cap f(Y)$.
3. Man zeige, dass f genau dann injektiv ist, wenn

$$f(X \cap Y) = f(X) \cap f(Y) \qquad \forall X, Y \subseteq A.$$

Total: 4 Punkte

`Zusatzaufgaben auf der Rückseite`

Zusatzaufgaben

Diese Aufgaben werden weder bewertet noch müssen sie abgegeben werden.
Sie werden in den Tutorien besprochen und sind für die Klausurvorbereitung sehr empfohlen.

Zusatzaufgabe 3.

Seien $f : A \longrightarrow B$ und $g : B \longrightarrow C$ zwei Abbildungen.

1. Man zeige, dass wenn f und g injektiv sind, dann ist auch $g \circ f$ injektiv.
2. Man zeige, dass wenn f und g surjektiv sind, dann ist auch $g \circ f$ surjektiv.
3. Man gebe ein Beispiel von Abbildungen f und g, sodass:
   a) $g \circ f$ injektiv ist, aber g nicht injektiv ist.
   b) $g \circ f$ surjektiv ist, aber f nicht surjektiv ist.

Zusatzaufgabe 4.

Sei $f : M \longrightarrow N$ eine Abbildung und seien $M' \subseteq M$ und $N' \subseteq \mathrm{Bild}(f) \subseteq N$ Teilmengen von M, beziehungweise N.

1. Man zeige, dass $M' \subseteq f^{-1}(f(M'))$.
2. Man zeige, dass $f(f^{-1}(N')) = N'$.
3. Man gebe ein Beispiel einer Abbildung f und einer Teilmenge M' wie oben, sodass $M' \subsetneq f^{-1}(f(M'))$ gilt.

Zusatzaufgabe 5.

Man zeige, dass für jede Menge M die einzige Abbildung $f : M \longrightarrow M$ mit der Eigenschaft

“für alle Mengen N und für alle Abbildungen $g : N \to M$ gilt $f \circ g = g$.”

die identische Abbildung der Menge M ist .

Zusatzaufgabe* 6.

Man zeige, dass es für keine Menge M eine bijektive Abbildung $f : M \longrightarrow 2^M$ gibt.

Zusatzaufgabe* 7.

Man bestimme alle Abbildungen $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ mit der Eigenschaft, dass

$$2f(x) + 3f(1-x) = 3x + 1 \qquad \forall\, x \in \mathbb{R}.$$