Freie Universität Berlin
Institut für Mathematik

Stand: 25. Oktober 2023

WiSe23/24

A. Constantinescu
J. Plock
F. Ugolini

Lineare Algebra 1 – Hausaufgabe 2

Abgabe via Whiteboard als `Name_LA1_H02.pdf` **bis 18:00 am Mittwoch**, den 1. November 2023.

Die Antworten sind stets zu begründen, inklusiv Beispiele.

Aufgabe 1. **2 Punkte**

Man betrachte folgende Aussage, die von den Variablen $a, b \in \mathbb{R}$ abhängig ist:

$$A(a,b): \quad a - b = 3.$$

Man beweise, dass folgende Aussage falsch ist:

$$\big(\forall\ a \in \mathbb{R},\ \ \exists\ b \in \mathbb{R},\ \text{sodass}\ A(a,b)\big) \Rightarrow \big(\exists\ b \in \mathbb{R},\ \ \text{sodass}\ \ \forall\ a \in \mathbb{R}\ \ A(a,b)\big).$$

Aufgabe 2. **2 Punkte**

Man betrachte die Menge $M = \{(a,b) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \ \ : \ \ a^2 \cdot (b+1) = 800\}$.

1. Man liste alle Elemente von M auf.

   (Man muss dabei auch begründen warum es genau diese sind.)
2. Ist M der Graph einer Abbildung?

Total: 4 Punkte

`Zusatzaufgaben auf der Rückseite`

Zusatzaufgaben

Diese Aufgaben werden weder bewertet noch müssen sie abgegeben werden.
Sie werden in den Tutorien besprochen und sind für die Klausurvorbereitung sehr empfohlen.

Zusatzaufgabe 3.

Folgende Aussage war in der Linearen Algebra Klausur zu beweisen:

$$M(a) \sim M(b) \iff a \neq b.$$

Die Natur der Objekte $a, b, M(a)$ und $M(b)$ ist hier nicht wichtig. Man sollte nur wissen, dass $\nsim$ die Negation von $\sim$ ist, genau wie $\neq$ die Negation von $=$ ist.

Bob hat bewiesen, dass "$a = b \Rightarrow M(a) \nsim M(b)$". Hat Bob somit eine der Implikationen, die zu zeigen waren, bewiesen? Wenn Ja, welche?

Zusatzaufgabe 4.

Es seien A und B zwei Aussagen und es seien M und N zwei Meingen.

1. Man zeige, dass "$(A \Rightarrow B)$ oder $(B \Rightarrow A)$" eine Tautologie ist.
2. Man gebe ein Beispiel, sodass $M \not\subseteq N$ und $N \not\subseteq M$.
3. Warum kann man aus der Wahrheit der Aussage

$$\big((x \in M) \Rightarrow (x \in N)\big) \text{ oder } \big((x \in N) \Rightarrow (x \in M)\big)$$

   nicht folgern, dass für zwei beliebige Mengen $M \subseteq N$ oder $N \subseteq M$ gelten muss.
4. Für A : "*p ist eine Primzahl*" und B : "$p \geqslant 5$" gilt keine der zwei Implikationen. Warum widerspricht das Punkt 1 nicht?

Zusatzaufgabe 5.

Es seien $f = (A, B, \Gamma_1)$ und $g = (B, C, \Gamma_2)$ zwei Abbildungen (gegeben als Tripel). Man zeige, dass (A, C, Γ_3) auch eine Abbildung ist, wobei

$$\Gamma_3 = \{(a, c) \in A \times C \ : \ \exists b \in B \text{ mit } (a, b) \in \Gamma_1 \text{ und } (b, c) \in \Gamma_2.\}$$

Diese Abbildung wird mit $g \circ f$ bezeichnet und ist heißt die Verknüpfung von f und g.

Zusatzaufgabe 6.

Man bestimme alle Teilmengen der Menge

$$M = \Big\{1, \{1\}, \{1, 1\}, \{1, \{1\}\}, \Big\{1, \{1\}, \{1, \{1\}\}\Big\}\Big\}.$$

Zusatzaufgabe 7.

In den folgenden zwei Fällen, bestimme man alle Mengen E, die die Eigenschaften erfüllen.

1. $\{1, 2, 3, 4\} \subseteq E$, $\{3, 4, 5, 6\} \subseteq E$ und $E \subsetneq \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$.
2. $E \subseteq \{a, b, c, d, g\}$, $E \subseteq \{c, d, e, f, g\}$, $\{c, d\} \subseteq E$ und $f \notin E$.