
Lineare Algebra 1 – Hausaufgabe 1

Abgabe via Whiteboard als Name_LA1_H01.pdf bis 18:00 am Mittwoch, den 25. Oktober 2023.

Die Antworten sind stets zu begründen, inklusiv Beispiele.

Aufgabe 1.

2 Punkte

1. Lokale Mathematik Olympiade für die 4. Klasse, Rumänien, 1986:

Wenn Ionel[†] zwei Mathematikhefte und zwei Zeichenhefte kaufen würde, würde er 12 Lei[‡] bezahlen, aber wenn er zwei Mathematikhefte und drei Zeichenhefte kaufen würde, würde er einen Leu mehr bezahlen. Wie viel kostet ein Heft von jeder Art?

2. Formulieren Sie die Aufgabe als ein lineares Gleichungssystem und zeichnen Sie die Lösungsmenge jeder Gleichung in der reellen Ebene \mathbb{R}^2 .

Aufgabe 2.

2 Punkte

Eine **Implikation** ist eine Aussage der Form:

Wenn Aussage A wahr ist, **dann** ist Aussage B wahr. (1)

Die Aussage A heißt **Voraussetzung** und die Aussage B heißt **Schlussfolgerung**. Implikationen sind nicht immer in der Form (1) gegeben. Zum Beispiel:

Die Summe zweier gerader Zahlen ist gerade. (2)

ist eine Implikation. Man kann das durch umformulieren deutlicher machen:

Wenn a und b gerade Zahlen sind, dann ist $a + b$ eine gerade Zahl.

Formulieren Sie folgende Aussagen auch als **Wenn A , dann B** :

1. *Alle Katzen sind blau.*
2. *In einem rechtwinkligen Dreieck ist die Summe der Quadraten der Längen der Kathäten gleich mit dem Quadrat der Länge der Hypothenuse.*
3. *Für alle ganze Zahlen $a \in \mathbb{Z}$ und für alle Primzahlen p gilt $a^p \equiv a \pmod{p}$.*
4. *Es gibt keine positive ganze Zahlen $a, b, c \in \mathbb{Z}_{>0}$, sodass $a^n + b^n = c^n$ mit $n \in \mathbb{N}_{>2}$.*

Total: 4 Punkte

Zusatzaufgaben auf der Rückseite

[†] Diminutiv des Namens *Ion*, die Rumänische Variante von Johann; also "Johannchen".

[‡] Die Rumänische Währung: Leu, Pl.: Lei.

Zusatzaufgaben

Diese Aufgaben werden weder bewertet noch müssen sie abgegeben werden.
Sie werden in den Tutorien besprochen und sind für die Klausurvorbereitung sehr empfohlen.

Zusatzaufgabe 3.

Die Summe von drei Zahlen beträgt 1 229. Die zweite Zahl ist doppelt so groß wie die erste und um 14 kleiner als die dritte.

1. Formulieren Sie die Aufgabe als ein lineares Gleichungssystem.
2. Finden Sie die drei Zahlen.

Zusatzaufgabe 4.

Man ersetze in der Reihe hier unten die \star mit natürlichen Zahlen, sodass die Summe drei hintereinanderfolgender Zahlen in der Kette 10 ist:

$$3 \star \star \star \star \star \star \star \star 2 \star \star \star \star$$

Man formuliere auch diese Aufgabe als ein lineares Gleichungssystem.

Zusatzaufgabe 5.

Formulieren Sie die folgenden Aussagen als "Wenn A, dann B":

1. *Alle Potenzen der natürlichen Zahl 2 sind gerade Zahlen.*
2. *Eine Zahl die durch 5 teilbar ist, hat als letzte Ziffer entweder eine 0 oder eine 5.*
3. *Die Zahlen, deren Quersumme[†] nicht durch 9 teilbar ist, sind selber nicht durch 9 teilbar.*
4. *Es gibt keine reellen Zahlen mit negativen Quadraten.*

Zusatzaufgabe 6.

Wenn 1,5 Hühner in 1,5 Tagen 1,5 Eier legen, wie viele Eier legen dann 7 Hühner in 9 Tagen?

[†] Die Summe aller Ziffern.

Zusatzaufgabe** 7.

Man ersetze alle der folgenden \times mit Ziffern, sodass folgende lange Division stimmt:

$$\begin{array}{r} \times \times \times \times \times \times \times \times : \times \times \times = \times \times 8 \times \times \\ - \times \times \times \\ \hline \times \times \times \times \\ - \times \times \times \\ \hline \times \times \times \times \\ - \times \times \times \times \\ \hline 0 \end{array}$$

Keine der drei Anfangsziffern darf Null sein. Ein Beispiel von langer Division ist:

$$\begin{array}{r} 1 \ 3 \ 3 \ 3 \ 2 : 1 \ 3 \ 2 = 1 \ 0 \ 1 \\ - 1 \ 3 \ 2 \\ \hline 1 \ 3 \ 2 \\ - 1 \ 3 \ 2 \\ \hline 0 \end{array}$$