Freie Universität Berlin
Institut für Mathematik

WiSe23/24
A. Constantinescu
J. Plock
F. Ugolini

Stand: 17. Februar 2024

Lineare Algebra 1 – Hausaufgabe 15

Abgabe via Whiteboard als `Name_LA1_H15.pdf` **bis 18:00 am Mittwoch**, den 14. Februar 2024.

Die Antworten sind stets zu begründen, inklusiv Beispiele.

L Ö S U N G E N

Übung 1. **2 Punkte**

Seien V und W endlichdimensionale $\mathbb{K}$-Vektorräume und sei $f \in \operatorname{Hom}_{\mathbb{K}}(V, W)$ mit $\operatorname{Rang}(f) = r$. Man beweise, dass es geordnete Basen B von V und C von W gibt, sodass

$$M_C^B(f) = \left(\begin{array}{c|c} I_r & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right),$$

wobei I_r die $r \times r$ Identitätsmatrix ist und die "0" für Blöcke mit Nulleinträgen stehen.

Lösung zu Übung 1.

Weil $\operatorname{Rang}(f) = r$*, haben wir* $\dim_{\mathbb{K}} \operatorname{Bild} f = r$*, also aus dem Dimensionssatz* $\dim_{\mathbb{K}} \operatorname{Ker} f = n - r$*, wobei* $n = \dim_{\mathbb{K}} V$*. Genau wie in dem Beweis des Dimensionssatzes, wählen wir eine Basis* $v_1, \dots, v_{n-r}$ *von* $\operatorname{Ker} f$ *und ergänzen diese zu einer Basis von* V*:*

$$v_1, \dots, v_{n-r}, v_{n-r+1}, \dots, v_n.$$

Wieder aus dem Beweis des Dimensionssatzes haben wir, dass $f(v_{n-r+1}), \dots, f(v_n)$ *eine Basis von* $\operatorname{Bild} f$ *ist. Wir ergänzen diese zu einer Basis von* W*:*

$$f(v_{n-r+1}), \dots, f(v_n), w_1, \dots, w_{m-r}.$$

Wir setzen dann:

$$\begin{aligned} B &= v_{n-r+1}, \dots, v_n, v_1, \dots, v_{n-r} \\ C &= f(v_{n-r+1}), \dots, f(v_n), w_1, \dots, w_{m-r}. \end{aligned}$$

Die Matrix hat dann die gesuchte Form, weil

$$f(v_i) = \begin{cases} 1 \cdot f(v_i) \neq 0 & \text{für } \; i = n - r + 1, \dots, n. \\ 0 & \text{für } \; i = 1, \dots, n - r. \end{cases}$$

Übung 2. **2 Punkte**

Seien U, W zwei Untervektorräume eines euklidischen Vektorraumes. Zeigen Sie, dass

$$(W + U)^{\perp} = W^{\perp} \cap U^{\perp} \qquad \text{und} \qquad (W \cap U)^{\perp} = W^{\perp} + U^{\perp}.$$

Lösung zu Übung 2.

Wir zeigen zu erst, dass $(W+U)^{\perp} = W^{\perp} \cap U^{\perp}$. Es gilt allgemein, dass wenn $U_1 \subseteq U_2$, dann $U_1^{\perp} \subseteq U_2^{\perp}$. Weil $U, W \subseteq W + U$ haben wir $(W+U)^{\perp} \subseteq W^{\perp} \cap U^{\perp}$.
Für die andere Inklusion sei $v \in W^{\perp} \cap U^{\perp}$ beliebig. Also $v \perp w$ für alle $w \in W$ und $v \perp u$ für alle $u \in U$. Es gilt dann für alle $w + u \in W + U$:

$$\langle v, w + u \rangle = \langle v, w \rangle + \langle v, u \rangle = 0 + 0 = 0.$$

Also $v \perp (w + u)$ für alle $w + u \in W + U$, und somit $v \in (W + U)^{\perp}$.

Für die zweite Gleichheit verwenden wir die erste, also dass für alle Unterräume $A, B \subseteq_{\mathbb{R}} V$ gilt

$$(A + B)^{\perp} = A^{\perp} \cap B^{\perp}$$

Wir setzen in der obigen Gleichheit $A = W^{\perp}$ und $B = U^{\perp}$ ein und bekommen:

$$(W^{\perp} + U^{\perp})^{\perp} = (W^{\perp})^{\perp} \cap (U^{\perp})^{\perp} = W \cap U.$$

Dann nehmen wir das orthogonale Komplement in $(W^{\perp} + U^{\perp})^{\perp} = W \cap U$ und erhalten:

$$(W^{\perp} + U^{\perp})^{\perp\perp} = (W \cap U)^{\perp}$$

Weil es endlich dimensionale Vektorräume sind, ist das orthogonale Komplement des Komplements gleich mit dem Unterraum selber. Also

$$W^{\perp} + U^{\perp} = (W \cap U)^{\perp}.$$