Freie Universität Berlin
Institut für Mathematik

WiSe23/24
A. Constantinescu
J. Plock
F. Ugolini

Stand: 16. Februar 2024

Lineare Algebra 1 – Hausaufgabe 14

Abgabe via Whiteboard als `Name_LA1_H14.pdf` **bis 18:00 am Mittwoch**, den 7. Februar 2024.

Die Antworten sind stets zu begründen, inklusiv Beispiele.

L Ö S U N G E N

Aufgabe 1. 2 Punkte

Sei $E = \{e_1, e_2\}$ die Standardbasis des $\mathbb{R}$-Vektorraumes $\mathbb{R}^2$ und $B = \{e_1 + e_2, e_1 - e_2\} \subseteq \mathbb{R}^2$ eine weitere Basis. Bestimmen Sie die zugeordneten Matrizen $M_E^E(f)$ und $M_B^B(f)$ für folgende Endomorphismen f von $\mathbb{R}^2$:

1. $f = f_\lambda : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ mit $f_\lambda(x, y) = \lambda \cdot (x, y)$, für $\lambda \in \mathbb{R}$.
2. f ist die Spiegelung an der x-Achse.
3. $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ gegeben durch $f(x, y) := (x + y, y)$.

Lösung zu Übung 1.

Bezeichne mit $b_1 = e_1 + e_2$ und $b_2 = e_1 - e_2$.

1. *Es gilt $f_\lambda(e_i) = \lambda \cdot e_i$ und $f_\lambda(b_i) = \lambda \cdot b_i$. Also in beiden Fällen gilt:*

$$M_E^E(f_\lambda) = M_B^B(f_\lambda) = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}.$$

2. *Für die Spiegelung an der x-Achse haben wir:*

$$\begin{aligned} f(e_1) &= e_1 &&= 1 \cdot e_1 + 0 \cdot e_2 \\ f(e_2) &= -e_2 &&= 0 \cdot e_1 + (-1) \cdot e_2 \\ f(b_1) &= e_1 - e_2 &&= 0 \cdot b_1 + 1 \cdot b_2 \\ f(b_2) &= e_1 + e_2 &&= 1 \cdot b_1 + 0 \cdot b_2. \end{aligned}$$

Es gilt also

$$M_E^E(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \qquad M_B^B(f) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

3. *Für diese Abbildung haben wir:*

$$\begin{array}{rclcl} f(e_1) & = & e_1 & = & 1 \cdot e_1 + 0 \cdot e_2 \\ f(e_2) & = & (1,1) & = & 1 \cdot e_1 + 1 \cdot e_2 \\ f(b_1) & = & (2,1) & = & \frac{3}{2} \cdot b_1 + \frac{1}{2} \cdot b_2 \\ f(b_2) & = & (0,-1) & = & -\frac{1}{2} \cdot b_1 + \frac{1}{2} \cdot b_2. \end{array}$$

Es gilt also

$$M_E^E(f) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad M_B^B(f) = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 2. **2 Punkte**

Seien $U = \mathrm{Span}_{\mathbb{Q}}\{(-4,2,1)\}$ und $V = \{(x,y,z) \in \mathbb{Q}^3 \;:\; x+y+z=0\}$ zwei $\mathbb{Q}$-UVR von $\mathbb{Q}^3$.

1. Wie erkennt man am schnellsten, dass U und V komplementär zueinander sind?
2. Man gebe eine Basis B für V an. Wie erkennt man an $\{(-4,2,1)\}$ und B, dass U und V komplementär zueinander sind?
3. Sei $p : \mathbb{Q}^3 = U \oplus V \longrightarrow V$ die kanonische Projektion auf V entlang U:
$$p(u+v) := v.$$
Man berechne die Darstellungsbatrix $M_B^{\mathcal{E}}(p)$, wobei $\mathcal{E} = (1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)$ die Standardbasis von $\mathbb{Q}^3$ bezeichnet.
4. Man setze $B' = \{(-4,2,1)\} \cup B$ als Basis von $\mathbb{Q}^3$, wobei B die Basis aus Punkt 2 ist, und man berechne $M_B^{B'}(p)$.

Lösung zu Übung 2.

1. *Da sich* $\dim U = 1$ *und* $\dim V = 2$ *zu* $\dim \mathbb{Q}^3 = 3$ *aufaddieren, muss nur* $U \cap V = \{0\}$ *nachgeprüft werden. Wegen* $\dim U = 1$ *ist das äquivalent zu* $U \not\subseteq V$*, d.h. wir müssen nur* $(-4)+2+1 \neq 0$ *nachprüfen.*
2. *Wir wählen* $B = \{(1,0,-1),(0,1,-1)\}$ *– die Komplementarität folgt dann, weil*
$$B' := \{(-4,2,1),(1,0,-1),(0,1,-1)\}$$
eine Basis von $\mathbb{Q}^3$ *ist.*
3. *Um* p_V *zu berechnen, müssen die Argumente aus* $\mathbb{Q}^3$*, also hier die drei Einheitsvektoren* e_i *in eine Summe aus* U*- und* V *Vektoren zerlegt werden. Das ergibt sich am einfachsten durch die Anwendung der linearen Abbildung* $f(x,y,z) := x+y+z$ *auf die* e_i*. Da das Ergebnis hier immer 1 ist, und da auch* $f(-4,2,1) = 1$ *(also* $(f(-(4,2,1)) = -1$*) erhalten wir die Zerlegungen*
$$e_i = -(-4,2,1) + ((-4,2,1) + e_i)\,.$$
Zur Bestimmung der Matrix müssen nun die hinteren Summanden (aus V*) als* B*-Linearkombination dargestellt werden. Die Koeffizienten erkennt man bei unserem speziellen* B *jeweils an den ersten beiden Einträgen, z.B.:*
$$(-4,2,1) + e_1 = (-3,2,1) = -3(1,0,-1) + 2(0,1,-1)$$

Damit ergibt sich $M_B^{\mathcal{E}}(p_V) = \begin{pmatrix} -3 & -4 & -4 \\ 2 & 3 & 2 \end{pmatrix}$. *Das konkrete Resultat hängt natürlich von der Wahl von* B *ab.*

4. B' *teilt sich auf in eine (die gegebene)* U*-Basis und die* V*-Basis* B. *Unter* p_V *wird der erste Teil auf 0 abgebildet; der zweite Teil wird unverändert übernommen. Also* $M_{B'}^{B}(p_V) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. *Das ist von der Wahl von* B *(und sogar von* V*) unabhängig.*