Freie Universität Berlin
Institut für Mathematik

Stand: 1. Februar 2024

WiSe23/24
A. Constantinescu
J. Plock
F. Ugolini

Lineare Algebra 1 – Hausaufgabe 13

Abgabe via Whiteboard als `Name_LA1_H13.pdf` **bis 18:00 am Mittwoch**, den 31. Januar 2024.

Die Antworten sind stets zu begründen, inklusiv Beispiele.

L Ö S U N G E N

Aufgabe 1. 2 Punkte

Sei V ein endlich-dimensionaler $\mathbb{K}$-Vektorraum und $f \in \mathrm{End}_{\mathbb{K}}(V)$, das heißt $f : V \longrightarrow V$ ist $\mathbb{K}$-linear. Mit f^2 bezeichnet man $f \circ f$.

1. Man zeige, dass $\mathrm{Bild}\, f^2 \subseteq \mathrm{Bild}\, f$ und $\mathrm{Ker}\, f \subseteq \mathrm{Ker}\, f^2$.
2. Man zeige, dass folgende Aussagen äquivalent sind
   (a) $\mathrm{Bild}\, f^2 = \mathrm{Bild}\, f$.
   (b) $\mathrm{Ker}\, f = \mathrm{Ker}\, f^2$.
   (c) $\mathrm{Bild}\, f \cap \mathrm{Ker}\, f = 0$.
   (d) $V = \mathrm{Bild}\, f \oplus \mathrm{Ker}\, f$.

Lösung zu Übung 1.

1. *Sei* $w \in \mathrm{Bild}\, f^2$ *beliebig. Das heißt, es existiert* $v \in V$*, sodass* $w = f^2(v) = f(f(v))$*. Also* $w = f(u) \in Bild(f)$ *mit* $u = f(v) \in V$*. Somit gilt* $\mathrm{Bild}\, f^2 \subseteq \mathrm{Bild}\, f$.

   Sei $v \in \mathrm{Ker}\, f$*. Es folgt also* $f(v) = 0$*. Dann gilt*
   $$f^2(v) = f(f(v)) = f(0) = 0.$$
   Also $v \in \mathrm{Ker}\, f^2$.
2. $\boxed{\text{(a)}\Leftrightarrow\text{(b)}}$ *Aus dem Dimensionssatz für* f *und für* f^2 *haben wir:*
   $$\dim_{\mathbb{K}} V = \dim_{\mathbb{K}} \mathrm{Ker}\, f + \dim_{\mathbb{K}} \mathrm{Bild}\, f = \dim_{\mathbb{K}} \mathrm{Ker}\, f^2 + \dim_{\mathbb{K}} \mathrm{Bild}\, f^2.$$
   Also $\dim_{\mathbb{K}} \mathrm{Ker}\, f^2 - \dim_{\mathbb{K}} \mathrm{Ker}\, f = \dim_{\mathbb{K}} \mathrm{Bild}\, f - \dim_{\mathbb{K}} \mathrm{Bild}\, f^2$ *und somit*
   $$\dim_{\mathbb{K}} \mathrm{Ker}\, f^2 = \dim_{\mathbb{K}} \mathrm{Ker}\, f \quad \Longleftrightarrow \quad \dim_{\mathbb{K}} \mathrm{Bild}\, f = \dim_{\mathbb{K}} \mathrm{Bild}\, f^2.$$
   Die Inklusionen aus Punkt 1 geben uns dann die gesuchte Äquivalenz.

   $\boxed{\text{(b)}\Rightarrow\text{(c)}}$ *Sei* $v \in \mathrm{Ker}\, f \cap \mathrm{Bild}\, f$*. Also* $f(v) = 0$ *und es existiert* $w \in V$ *mit* $f(w) = v$*. Es folgt daraus:*
   $$f^2(w) = f(v) = 0$$

und somit $w \in \operatorname{Ker} f^2$. *Aber* $\operatorname{Ker} f^2 = \operatorname{Ker} f$ *und somit* $v = f(w) = 0$.

$\boxed{\text{(c)}\Leftrightarrow\text{(d)}}$ *Wir haben aus Korollar 4.3 (Grassmann):*

$$\dim_{\mathbb{K}}(\operatorname{Ker} f + \operatorname{Bild} f) = \dim_{\mathbb{K}} \operatorname{Ker} f + \dim_{\mathbb{K}} \operatorname{Bild} f - \dim_{\mathbb{K}}(\operatorname{Ker} f \cap \operatorname{Bild} f).$$

Aus dem Dimensionssatz haben wir auch $\dim_{\mathbb{K}} V = \dim_{\mathbb{K}} \operatorname{Ker} f + \dim_{\mathbb{K}} \operatorname{Bild} f$. *Also*

$$\dim_{\mathbb{K}}(\operatorname{Ker} f + \operatorname{Bild} f) = \dim_{\mathbb{K}} V - \dim_{\mathbb{K}}(\operatorname{Ker} f \cap \operatorname{Bild} f)$$

und somit ist $\operatorname{Ker} f \cap \operatorname{Bild} f = 0$ *äquivalent zu* $\operatorname{Ker} f + \operatorname{Bild} f = V$. *Wenn beide gleichzeitig gelten (und in diesem Fall geht es nur so) ist dann* $V = \operatorname{Ker} f \oplus \operatorname{Bild} f$.

$\boxed{\text{(c)}\Rightarrow\text{(b)}}$ *Sei* $w \in \operatorname{Ker} f^2$ *beliebig. Es folgt dann, dass* $f(w) \in \operatorname{Ker} f$ *und per Definition auch in* $\operatorname{Bild} f$. *Also* $f(w) \in \operatorname{Ker} f \cap \operatorname{Bild} f = 0$, *und somit* $f(w) = 0$, *also* $w \in \operatorname{Ker} f$.

Aufgabe 2. **2 Punkte**

Sei $U = \operatorname{Span}_{\mathbb{R}}\{(1,1,1)\} \subseteq_{\mathbb{R}} V := \mathbb{R}^3$. Bezeichne für $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ die Restklasse modulo U mit

$$[x,y,z] := (x,y,z) + U \in V/U.$$

1. Man zeige, dass die Vektoren $[2,1,1], [1,2,1], [1,1,2] \in V/U$ linear abhängig sind.
2. Man finde eine Basis von V/U.
3. Man gebe ein Beispiel einer injektiven $\mathbb{K}$-linearen Abbildung $f : V/U \longrightarrow \mathbb{R}^4$.

Lösung zu Übung 2.

1. *Wähle* $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 1$. *Dann gilt:*

$$1 \cdot [2,1,1] + 1 \cdot [1,2,1] + 1 \cdot [1,1,2] = [3,3,3] = [0,0,0] \in V/U.$$

2. *Wir haben* $U := \operatorname{Span}_{\mathbb{R}}\{(2,1,1),(1,2,1),(1,1,2)\} = \mathbb{R}^3$, *weil*

$$\frac{3}{4}(2,1,1) - \frac{1}{4}(1,2,1) - \frac{1}{4}(1,1,2) = (1,0,0)$$

und analog bekommen wir auch $(0,1,0)$ *und* $(0,0,1)$ *in* $\operatorname{Span}_{\mathbb{R}}\{(2,1,1),(1,2,1),(1,1,2)\}$. *Also weil die kanonische Projektion* $\mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3/U$ *surjektiv, gilt auch*

$$\operatorname{Span}_{\mathbb{R}}\{[2,1,1],[1,2,1],[1,1,2]\} = \mathbb{R}^3/U.$$

Wir wissen also, dass jede maximale linear unabhängige Teilmenge eine Basis ist. Wir zeigen, dass $[2,1,1]$ *und* $[1,2,1]$ *linear unabhängig sind. Seien* $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$, *sodass*

$$\lambda_1[2,1,1] + \lambda_2[1,2,1] = [0,0,0].$$

Das heißt, dass $(2\lambda_1 + la_2, \lambda_1 + 2\lambda_2, \lambda_1 + \lambda_2) \in U = \{(t,t,t) \ : \ t \in \mathbb{R}\}$. *Es folgt also*

$$2\lambda_1 + \lambda_2 = \lambda_1 + 2\lambda_2 = \lambda_1 + \lambda_2$$

und das gilt nur für $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$. Also eine Basis von $\mathbb{R}^3/U$ ist

$$\{[2,1,1],[1,2,1]\}.$$

***Alternativ** und eleganter kann man Korollar 4.18 anwenden, und die Basis von U zu einer Basis von $\mathbb{R}^3$ ergänzen. Zum Beispiel zu $\{(1,1,1),(1,0,0),(0,1,0)\}$. Dann folgt aus dem Korollar, dass $\{[1,0,0],[0,1,0]\}$ eine Basis von $\mathbb{R}^3/U$ ist.*

3. *Wir suchen eine $\mathbb{K}$-lineare Abbildung $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^4$ mit $\operatorname{Ker} f = U$. Es muss also $f(x,y,z) = (0,0,0,0) \iff x = y = z$. Zum Beispiel*

$$f(x,y,z) = (x-y, y-z, 0, 0)$$

Die Abbildung ist $\mathbb{K}$-linear weil für alle $v_1 = (x_1,y_1,z_1), v_2 = (x_2,y_2,z_2) \in \mathbb{R}^3$ und alle $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ gilt

$$\begin{aligned} f(\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2) &= f(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2, \lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2, \lambda_1 z_1 + \lambda_2 z_2) \\ &= (\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 - \lambda_1 y_1 - \lambda_2 y_2, \lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2 - \lambda_1 z_1 - \lambda_2 z_2, 0, 0) \\ &= \lambda_1(x_1 - y_1, y_1 - z_1, 0, 0) + \lambda_2(x_2 - y_2, y_2 - z_2, 0, 0). \end{aligned}$$

Es gilt auch

$$(x,y,z) \in \operatorname{Ker} f \iff (x-y, y-z, 0, 0) = (0,0,0,0) \iff x = y = z.$$

Also $\operatorname{Ker} f = U$, und somit ist $f : V/U \longrightarrow \mathbb{R}^4$ wohl definiert und injektiv.