Freie Universität Berlin
Institut für Mathematik

WiSe23/24
A. Constantinescu
J. Plock
F. Ugolini

Stand: 1. Februar 2024

Lineare Algebra 1 – Hausaufgabe 12

Abgabe via Whiteboard als `Name_LA1_H12.pdf` **bis 18:00 am Mittwoch**, den 24. Januar 2024.

Die Antworten sind stets zu begründen, inklusiv Beispiele.

L Ö S U N G E N

Aufgabe 1. **2 Punkte**

Seinen folgende Teilmengen des $\mathbb{R}$-Vektorraumes $\mathbb{R}^4$:

$$\begin{aligned} T &= \{(1,1,1,0),(0,1,1,1)\} \\ S &= \{(1,1,0,0),(1,0,1,0),(1,0,0,1),(0,1,1,0),(0,1,0,1),(0,0,1,1)\}. \end{aligned}$$

1. Man zeige, dass T linear unabhängig ist.
2. Man zeige, dass S ein Erzeugendensystem von $\mathbb{R}^4$ ist.
3. Man ergänze T mit Vektoren aus S zu einer Basis von V.

Lösung zu Übung 1.

1. *Wir zeigen das direkt mit der Definition:*

$$\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 = (\lambda_1, \lambda_1 + \lambda_2, \lambda_1 + \lambda_2, \lambda_2) = 0 \Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = 0.$$

2. *Es reicht zu zeigen, dass die Standardbasis in* $\operatorname{Span}_{\mathbb{R}} S$ *enthalten ist, weil Daraus folgt* $\mathbb{R}^4 \subseteq \operatorname{Span}_{\mathbb{R}} S$, *also* $\operatorname{Span}_{\mathbb{R}} S = \mathbb{R}^4$.

$$\begin{aligned} 2 \cdot e_1 &= (1,1,0,0) + (1,0,1,0) - (0,1,1,0) \\ 2 \cdot e_2 &= (1,1,0,0) + (0,1,1,0) - (1,0,1,0) \\ 2 \cdot e_3 &= (0,1,1,0) + (1,0,1,0) - (1,1,0,0) \\ 2 \cdot e_4 &= (1,0,0,1) + (1,0,0,1) - (1,1,0,0) \end{aligned}$$

Wenn wir alle Gleichungen durch $2 \neq 0$ *teilen, bekommen wir* $e_i \in \operatorname{Span}_{\mathbb{R}} S$ *für* $i = 1, \ldots, 4$.

3. *Man kann die Aufgabe schrittweise wie im Beweis des Ergänzungssatzes lösen. Wir wenden hier den Algorithmus 1 aus Kapitel 6 (im Non-Skript) an. Wir schreiben also erstmals die Vektoren aus* T *und dann die aus* S *als Spalten einer Matrix:*

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Wir berechnen dann $\mathrm{RZ}(M)$*:*

$$\mathrm{RZ}(M) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & -3 & 2 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Also die Stufen sind $1, 2, 3, 4$ *und somit die Basis ist* $\{v_1, v_2, w_1, w_2\}$*, wenn* $T = \{v_1, v_2\}$ *und* $S = \{w_1, \dots, w_6\}$*.*

Aufgabe 2. **2 Punkte**

Sei W ein $\mathbb{K}$-UVR von V und seien $v_1, v_2 \in V$. Wir definieren für $i = 1, 2$

$$W_i := W + \mathrm{Span}_{\mathbb{K}} \{v_i\}.$$

Man zeige, dass wenn $v_2 \in W_1$ und $v_2 \notin W$, dann $v_1 \in W_2$.

Lösung zu Übung 2.

Aus $v_2 \in W_1$ *folgt, es existieren* $w_1, \dots, w_n \in W$ *und* $\mu, \lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{K}$*, sodass*

$$v_2 = \mu v_1 + \lambda_1 w_1 + \cdots + \lambda_n w_n.$$

Weil $v_2 \notin W$*, muss* $\mu \neq 0$ *sein. Also*

$$v_1 = \mu^{-1}(v_2 - \lambda_1 w_1 - \cdots - \lambda_n w_n) \in W_2.$$