Freie Universität Berlin
Institut für Mathematik

Stand: 1. Februar 2024

WiSe23/24
A. Constantinescu
J. Plock
F. Ugolini

Lineare Algebra 1 – Hausaufgabe 11

Abgabe via Whiteboard als `Name_LA1_H11.pdf` **bis 18:00 am Mittwoch**, den 17. Januar 2024.

Die Antworten sind stets zu begründen, inklusiv Beispiele.

L Ö S U N G E N

Aufgabe 1. **2 Punkte**

Seien U_1, U_2 und U_3 drei $\mathbb{K}$-Untervektorräume eines $\mathbb{K}$-Vektorraumes V mit der Eigenschaft $U_1 \subseteq U_3$. Man zeige, dass

$$(U_1 + U_2) \cap U_3 = U_1 + (U_2 \cap U_3).$$

Lösung zu Übung 1.

Wir zeigen die doppelte Inklusion.

$\boxed{\subseteq}$ *Sei* $v = v_1 + v_2 \in (U_1 + U_2) \cap U_3$ *mit* $v_1 \in U_1$ *und* $v_2 \in U_2$. *Weil* $v_1 \in U_1 \subseteq U_3$ *und* $v \in U_3$, *folgt dass* $v_2 = v - v_1 \in U_3$, *also* $v_2 \in U_2 \cap U_3$. *Also* $v \in U_1 + (U_2 \cap U_3)$.

$\boxed{\supseteq}$ *Sei* $v = v_1 + v_2$ *mit* $v_1 \in U_1$ *und* $v_2 \in U_2 \cap U_3 \subseteq U_2$. *Also* $v \in U_1 + U_2$ *und, weil* $v_1 \in U_1 \subseteq U_3$, *gilt auch* $v \in U_3$. *Also* $v \in (U_1 + U_2) \cap U_3$.

Aufgabe 2. **2 Punkte**

Man bestimme eine Basis des Lösungsraumes des homogenen linearen Gleichungssystems $A \cdot \mathbf{x} = \mathbf{0}$, wobei

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathrm{Mat}_4(\mathbb{R}).$$

Lösung zu Übung 2.

Die RZSF von A ist $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, *also*

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(A \,|\, \mathbf{0}) &= \{(-t_3, -t_4, t_3, t_4) \;:\; t_3, t_4 \in \mathbb{R}\} \\ &= \{t_3(-1,0,1,0) + t_4(0,-1,0,1) \;:\; t_3, t_4 \in \mathbb{R}\} \\ &= \mathrm{Span}_{\mathbb{R}}\{(-1,0,1,0), (0,-1,0,1)\}. \end{aligned}$$

Also $B = \{(-1,0,1,0),(0,-1,0,1)\}$ *ist ein Erzeugendensystem von* $\mathcal{L}(A \,|\, \mathbf{0})$. *Um zu zeigen, dass* B *eine Basis ist, müssen wir noch zeigen, dass es linear unabhängig ist. Das gilt weil:*

$$\lambda_1(-1,0,1,0) + \lambda_2(0,-1,0,1) = (0,0,0,0) \Rightarrow (-\lambda_1, -\lambda_2, \lambda_1, \lambda_2) = (0,0,0,0) \Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = 0.$$