Lineare Algebra 1 - ~~Probe~~lklausur

20.12.2023

Aufgabenstellung

Zeit: ~~90~~ 30 Minuten **Maximale Punktzahl:** ~~60~~ 20 Punkte **100%:** ~~48~~ 16 Punkte

---

L Ö S U N G E N

Aufgabe 1 **20 Punkte**

a. (2 P) Geben Sie die Definition von linearer Abbildung an.

Es seien $\mathbb{K}$ ein Körper, V und W zwei $\mathbb{K}$-Vektorräume. Eine Abbildung $f : V \longrightarrow W$ ist eine ($\mathbb{K}$-)lineare Abbildung, wenn

$$\begin{aligned} f(v_1 + v_2) &= f(v_1) + f(v_2) \qquad \forall\, v_1, v_2 \in V \qquad \text{und} \\ f(\lambda \cdot v) &= \lambda \cdot f(v) \qquad \forall\, \lambda \in \mathbb{K} \quad \text{und} \quad \forall\, v \in V. \end{aligned}$$

b. (3 P) Ziegen Sie, dass der Kern einer linearer Abbildung ein Untervektorraum ist.

Sei $f : V \longrightarrow W$ eine $\mathbb{K}$-lineare Abbildung. Der Kern von f ist definiert als

$$\operatorname{Ker} f = \{v \in V \;\;:\;\; f(v) = 0\}.$$

Weil f $\mathbb{K}$-linear ist, folgt es, dass $f(0) = 0$. Also $\operatorname{Ker} f \neq \emptyset$. Es reicht also zu zeigen, dass jede lineare Kombination zweier beliebigen Vektoren aus $\operatorname{Ker} f$ wieder in $\operatorname{Ker} f$ liegt. Seien also $u_1, u_2 \in \operatorname{Ker} f$ und $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{K}$ beliebig. Es gilt:

$$f(\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2) = \lambda_1 f(u_1) + \lambda_2 f(u_2) = \lambda_1 \cdot 0 + \lambda_2 \cdot 0 = 0,$$

wobei die erste Gleichheit wegen der Linearität von f gilt, die zweite, weil $u_i \in \operatorname{Ker} f$, und die dritte weil $\lambda \cdot 0 = 0$ für alle $\lambda \in \mathbb{K}$ gilt. Also $\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 \in \operatorname{Ker} f$, und somit ist $\operatorname{Ker} f \subseteq_{\mathbb{K}} V$ bewiesen.

c. (5 P) Geben Sie den Kern der linearen Abbildung $f_A : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ in parametrischer Form an, wobei

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \in \operatorname{Mat}_3(\mathbb{R})$$

und $f_A(\mathbf{x}) = A \cdot \mathbf{x}$.

Wir müssen die Menge $\operatorname{Ker} f_A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \;\;:\;\; A \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0\}$ in parametrischer

Form beschreiben. Das heißt, wir müssen die Lösungsmenge des homogenen linearen Gleichungssystems $A \cdot \mathbf{x} = 0$ bestimmen. Wir berechnen dafür die RZSF von A:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -3 & -4 \\ 0 & 3 & 4 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -3 & -4 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \to$$

$$\to \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 4/3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1/3 \\ 0 & 1 & 4/3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Es folgt also, dass wir die dritte Variable als Parameter setzten können und bekommen:

$$\operatorname{Ker} f = \{(-1/3 \cdot t, -4/3 \cdot t, t) \ : \ t \in \mathbb{R}\}.$$

Sei $\mathbb{K}$ ein beliebiger Körper und sei M die Menge

$$M = \left\{ A \in \operatorname{Mat}_2(\mathbb{K}) \ : \ \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot A = A \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right\}.$$

d. (4 P) Zeigen Sie, dass M ein $\mathbb{K}$-Untervektorraum von $\operatorname{Mat}_2(\mathbb{K})$ ist.

Genau wie in der Lösung von Punkt **b**, zeigen wir $M \neq \emptyset$ und $\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 \in M$ für alle $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{K}$, $A_1, A_2 \in M$.

Erstmals gilt: $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in M$, weil $X \cdot I_2 = I_2 \cdot X = X$ für alle $X \in M$. Also $M \neq \emptyset$.

Sei $A_1, A_2 \in M$. Es gilt also für $i \in \{1, 2\}$:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot A_i = A_i \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Seien $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{K}$, beliebig. Es gilt dann:

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot (\lambda_1 \cdot A_1 + \lambda_2 \cdot A_2) &= \lambda_1 \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot A_1 + \lambda_2 \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot A_2 \\ &= \lambda_1 \cdot A_1 \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + \lambda_2 \cdot A_2 \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \\ &= (\lambda_1 \cdot A_1 \cdot + \lambda_2 \cdot A_2) \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Also $\lambda_1 A_1 + \lambda_2 A_2 \in M$.

Variante 1: Man merkt, dass wenn $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, dann gilt

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} c & d \\ a & b \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} b & a \\ d & c \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Also $M = \{\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \; : \; b = c \;\text{ und } a = d\} = \{\begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix} \; : \; a, b \in \mathbb{K}\}$. Kann man analog zeigen, dass jede lineare Kombination zweier solchen Matrizen wieder eine solche Matrix ist.

Variante 2: Man zeigt, dass die Abbildung $f : \mathrm{Mat}_2(\mathbb{K}) \longrightarrow \mathrm{Mat}_2(\mathbb{K})$, gegeben durch

$$f(A) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot A - A \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

eine $\mathbb{K}$-lineare Abbildung ist. Dann ist $M = \mathrm{Ker}\, f$, also nach Punkt **b** ein $\mathbb{K}$-UVR.

e. (6 P) Zeigen Sie, dass folgende Teilmenge von M eine Gruppe zusammen mit der Matrix Multiplikation bildet:

$$G = M \cap \left\{ \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} \in \mathrm{Mat}_2(\mathbb{K}) \; : \; x \neq \pm y \right\}.$$

Wir haben in Variante 1 gesehen, dass $M = \{\begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix} \; : \; a, b \in \mathbb{K}\}$. Also

$$G = \{\begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix} \; : \; a, b \in \mathbb{K} \;\text{ und } a \neq \pm b\}.$$

Wir müssen als erstes überprüfen, dass die Matrixmultiplikation eine innere Verknüpfung auf G definiert: $G \times G \longrightarrow G$. Das heißt, dass $X \cdot Y \in G$ für alle $X, Y \in G$.
Seien $X, Y \in G$ beliebig. Es folgt es existieren $a, b, c, d \in \mathbb{K}$ mit $a \neq \pm b$ und $c \neq \pm d$, mit $X = \begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix}$ und $Y = \begin{pmatrix} c & d \\ d & c \end{pmatrix}$. Es gilt dann:

$$X \cdot Y = \begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} c & d \\ d & c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ac + bd & ad + bc \\ bc + ad & bd + ac \end{pmatrix}$$

Wir müssen noch zeigen, dass $ac + bd \neq \pm ad + bc$. Oder, äquivalent dazu, $ac + bd - ad - bc \neq 0$ und $ac + bd + ad + bc \neq 0$. Es gilt

$$\begin{aligned} ac + bd - ad - bc &= (a - b)(c - d) \\ ac + bd + ad + bc &= (a + b)(c + d). \end{aligned}$$

Also, weil $a - b \neq 0 \neq a + b$ und $c - d \neq 0 \neq c + d$, haben wir die erwünschte Ungleichheit.

Wir müssen noch die Assoziativität überprüfen, ein neutrales Element finden und die Invertierbarkeit (in G!) jedes Elements zeigen.

Assoziativität: Diese wird von der Assoziativität der Multiplikation der Matrizen geerbt.

Neutralelement: Für $a = 1$ und $b = 0$ bekommen wir $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in G$. Das ist das neutrale Element der Matrixmultiplikation, also auch das neutrale Element in G.

Invertierbarkeit: Sei $X = \begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix} \in G$ beliebig. Das heißt, $a \neq \pm b$. Wir suchen $X^{-1} =$

$\begin{pmatrix} c & d \\ d & c \end{pmatrix} \in G$ (also mit $c \neq \pm d$), sodass $X \cdot X^{-1} = X^{-1} \cdot X = I_2$.
Wie findet man X^{-1}? Man kann das Gleichungssystem mit Unbekannten c und d, das aus $X \cdot X^1 = I_2$ folgt, lösen. Oder man kann auch aus

$$X \cdot X^{-1} = \begin{pmatrix} ac+bd & ad+bc \\ cb+da & bd+ac \end{pmatrix} = I_2$$

merken, dass wir $c \cdot b + d \cdot a = 0$ brauchen. Eine einfache Wahl wäre also $d = -b$ und $c = a$. Mit dieser Wahl bekommt man:

$$\begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & -b \\ -b & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2 - b^2 & 0 \\ 0 & a^2 - b^2 \end{pmatrix}. \tag{1}$$

Aus $a \neq \pm b$ folgt $a^2 - b^2 = (a-b)(a+b) \neq 0$. Wir können also X^{-1} so definieren:

$$X^{-1} = \frac{1}{a^2 - b^2} \begin{pmatrix} a & -b \\ -b & a \end{pmatrix}.$$

Wichtiger Hinweis zur Strategie in der Klausur: Man muss nicht begründen wie man X^{-1} gefunden hat, man muss nur zeigen, dass es das Inverse von X ist.
Durch direktes rechnen wie in (1) zeigt man, dass X^{-1} das gesuchte inverse Element ist. Also $(G, \cdot)$ ist eine Gruppe.