Freie Universität Berlin
Institut für Mathematik

Stand: 19. Januar 2024

WiSe23/24
A. Constantinescu
J. Plock
F. Ugolini

Lineare Algebra 1 – Hausaufgabe 9

Abgabe via Whiteboard als `Name_LA1_H09.pdf` **bis 18:00 am Mittwoch**, den 20. Dezember 2023.

Die Antworten sind stets zu begründen, inklusiv Beispiele.

L Ö S U N G E N

Aufgabe 1. **2 Punkte**

Geben Sie jeweils ein Beispiel einer $(3\times3)-$Matrix, ohne triviale Einträge, die Zeilenstufenrang 1, 2, bezeihungsweise 3 hat.

Lösung zu Übung 1.

Zu diesem Zeitpunkt, haben wir als einziges Instrument aus der Vorlesung die RZSF und die Zeilenumformungen. Wir beginnen also mit einer Matrix in RZSF von erwünschtem Rang und formen diese um, sodass sie keine triviale Einträge mehr hat:

$$\begin{pmatrix}1&2&3\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}\mapsto\begin{pmatrix}1&2&3\\1&2&3\\1&2&3\end{pmatrix}.$$

$$\begin{pmatrix}1&0&2\\0&1&3\\0&0&0\end{pmatrix}\mapsto\begin{pmatrix}1&0&2\\1&1&5\\1&0&2\end{pmatrix}\mapsto\begin{pmatrix}2&1&7\\1&1&5\\2&1&7\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\mapsto\begin{pmatrix}1&0&0\\1&1&0\\1&0&1\end{pmatrix}\mapsto\begin{pmatrix}2&1&0\\1&1&0\\2&1&1\end{pmatrix}\mapsto\begin{pmatrix}4&2&1\\3&2&1\\2&1&1\end{pmatrix}$$

Aufgabe 2. **2 Punkte**

Für jede positive ganze Zahl $n \geqslant 2$ defienieren wir die Matrix $T_n \in \mathrm{Mat}_n(\mathbb{Q})$ als

$$T_n = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ n+1 & n+2 & \dots & 2n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ (n-1)n+1 & (n-1)n+2 & \dots & n^2 \end{pmatrix}$$

1. Berechnen Sie den ZS-Rang von T_n.[†]

[†]Hinweis: Finden Sie eine Relation zwischen 3 konsekutive Zeilen.

2. Geben Sie Lösungsmenge des homogenen LGS$(T_n \mid 0)$ in parametrischer Form an. Eine richtige und vollständige Lösung im Fall $n = 3$ wird mit 1 Punkt bewertet.

Lösung zu Übung 2.

1. *Wir analysieren Schritt für Schritt den Gaußschen Algorithmus. Wir bezeichnen die Einträge von T_n mit $t_{i,j}$. Wir haben per Definition der Matrix für alle $i, j \in \{1, \ldots, n\}$:*

$$t_{i,j} = (i-1) \cdot n + j.$$

Weil $t_{1,1} = 1$, sind die ersten $n-1$ Zeilenumformungen:

$$Z_i \mapsto Z_i - ((i-1) \cdot n + 1) \cdot Z_1.$$

Das heißt für $i = 2, \ldots, n$ und $j = 1, \ldots, n$ haben wir die Einträge neudefiniert als:

$$\begin{aligned} t_{i,j} &:= t_{i,j} - ((i-1) \cdot n + 1) \cdot t_{1,j} \\ &= (i-1) \cdot n + j - ((i-1) \cdot n + 1) \cdot j \\ &= (i-1) \cdot n + j - (i-1) \cdot n \cdot j - j \\ &= (i-1) \cdot n \cdot (1-j). \end{aligned}$$

Alle Zeilen außer der ersten haben also eine 0 in der ersten Spalte. Die Zweite Zeile ist jetzt:

$$Z_2 = (1 \cdot n \cdot (1-j))_{j=1,\ldots,n} = (0, -n, -2n, \ldots, -(n-1)n).$$

Die dritte Zeile ist jetzt:

$$Z_3 = (2 \cdot n \cdot (1-j))_{j=1,\ldots,n} = (0, -2n, -4n, \ldots, -2(n-1)n).$$

Und allgemein ist die i.Zeile für $2 \leqslant i \leqslant n$:

$$Z_i = ((i-1) \cdot n \cdot (1-j))_{j=1,\ldots,n} = (0, -(i-1)n, -2(i-1)n, \ldots, -(n-1)(i-1)n).$$

Die nächsten Zeilenumformungen sind dann für $i = 2, \ldots, n$:

$$Z_i \mapsto \frac{-1}{(i-1)n} \cdot Z_i.$$

Das bringt die Matrix auf der Form:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \ldots & n \\ 0 & 1 & 2 & \ldots & n-1 \\ 0 & 1 & 2 & \ldots & n-1 \\ \vdots & & & & \vdots \\ 0 & 1 & 2 & \ldots & n-1 \end{pmatrix}.$$

Die nächste Umformungen sind dann $Z_i \mapsto Z_i - Z_2$ für $i = 3, \ldots, n$ und

$$Z_1 \mapsto Z_1 - 2 \cdot Z_2$$

Wir bekommen also die RZSF:

$$\mathrm{RZ}(T_n) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & \ldots & -n+2 \\ 0 & 1 & 2 & \ldots & n-1 \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ \vdots & & & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 \end{pmatrix}.$$

2. *Für die Lösungsmenge des assoziiertes LGS haben wir $n-2$ nicht-Stufenvariablen, also $x_3, \ldots, x_n$ können jeden reellen Wert nehmen, und jede solche Wahl bestimmt x_1 und x_2 eindeutig:*

$$\begin{aligned} x_1 &= x_3 + 2x_4 + \cdots + (n-2)x_n, \\ x_2 &= -2x_3 - 3x_4 + \cdots - (n-1)x_n. \end{aligned}$$

Also

$$\mathcal{L}(T_n|0) = \{(t_3 + 2t_4 + \cdots + (n-2)t_n, -2t_3 - 3t_4 + \cdots - (n-1)t_n, t_3, \ldots, t_n) \ : \ t_3, \ldots, t_n \in \mathbb{R}\}.$$